

Сборник задач по теории электрических цепей

Под редакцией
П. Н. Матханова и Л. В. Данилова

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов электротехнических и радиотехнических специальностей вузов

RGR-TOE.RU
ТОО ОТЦ ТЛЭЦ Электротехника



Москва «Высшая школа» 1980

ББК 31.211
С23
УДК 621.3.01

Л. В. Данилов, П. Н. Матханов, Ю. Б. Мерзлютин,
А. С. Погодин, В. М. Золотницкий, А. В. Бондаренко,
Н. И. Дмоховская, Ю. А. Лукомский

Рецензенты:

Кафедра «Теоретические основы электротехники и электрофизики»
Московского энергетического института; проф. А. Ф. Белецкий (Ленин-
градский электротехнический институт связи).

Сборник задач по теории электрических цепей: Учеб. посо-
С23 бие для вузов / Данилов Л. В., Матханов П. Н., Мерзлю-
тин Ю. Б. и др.; Под ред. Матханова П. Н. и Данилова Л. В. —
М.: Высш. школа, 1980. — 224 с., ил.

В пер.: 75 к.

В сборник включены задачи по анализу линейных цепей во временной и ча-
стотной областях, синтезу линейных цепей и теории нелинейных цепей; приводятся
решения типовых задач и ответы к большей части задач. Содержание пособия соот-
ветствует программам курса «Основы теории цепей и раздела теории цепей курс-
са ТОЭ».

Предназначается для студентов электротехнических и радиотехнических специ-
альностей.

С 30306—258 102—80 2302000000 6П2.1
001(01)—80 ББК 31.211

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Под редакцией Матханова П. Н. и Данилова Л. В.

Редактор Е. А. Орехова. Переплет художника В. М. Боровкова. Художественный редактор
Т. М. Свирцова. Технический редактор Н. А. Битюкова. Корректор В. А. Орлова.

ИБ № 2074

Изд. № ЭР—267. Сдано в набор 30.10.79. Подп. в печать 06.05.80. Формат 60×90^{1/16}
Бум. тип № 3. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 14 усл. печ. л. Уч.-изд. л.
14.61. Тираж 38 000 экз. Зак. № 27. Цена 75 коп.

Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14. Издательство «Высшая школа»

Московская типография № 8 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете СССР
по делам издательства, полиграфии и книжной торговли,
Хословский вкп., 7.

О Г Л А В Л Е Н И Е

| | |
|--|-----|
| Предисловие | 4 |
| Общие замечания | 4 |
| Глава 1. Основные понятия и элементы линейных пассивных цепей . . | 5 |
| Глава 2. Анализ линейных резистивных цепей методами преобразований. Входные и передаточные функции резистивных цепей . . | 13 |
| Глава 3. Уравнения R -цепей, их решения и теоремы линейных цепей | 25 |
| Глава 4. Анализ RLC -цепей во временной области при постоянных воздействиях | 44 |
| Глава 5. Переходная и импульсная характеристики. Интегралы наложения | 71 |
| Глава 6. Анализ электрических цепей в режиме гармонических колебаний | 79 |
| Глава 7. Функции цепи и переходные процессы при синусоидальном и экспоненциальном воздействиях | 90 |
| Глава 8. Анализ цепей с многополюсными элементами | 100 |
| Глава 9. Примененные преобразования Лапласа | 120 |
| Глава 10. Спектральный метод анализа | 135 |
| Глава 11. Основы теории четырехполюсников | 144 |
| Глава 12. Частотно-избирательные цепи | 156 |
| Глава 13. Цепи с распределенными параметрами | 164 |
| Глава 14. Синтез линейных электрических цепей | 180 |
| Глава 15. Нелинейные электрические цепи | 201 |
| Рекомендуемая литература | 217 |
| Использованная литература | 217 |
| Ответы к задачам | 218 |

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сборник содержит задачи по всем вопросам курса «Теоретические основы электротехники».

В связи с возрастающим применением ЦВМ в инженерной практике большое внимание уделено задачам формализованного составления уравнений электрических цепей, главным образом матрично-топологическим методам, составлению уравнений состояния в форме Коши.

В сборник включены задачи повышенной трудности, а также задачи с элементами исследования. Некоторые задачи имеют решения (они обозначены буквой «р»), для многих задач даны различные методические указания (они обозначены буквой «м»). Большинство задач имеют ответы.

Авторы приносят глубокую благодарность рецензентам проф. А. Ф. Белецкому, проф. П. А. Ионкину, доц. Ф. П. Жарикову и доц. В. И. Паротькину за ценные замечания и советы.

О замечаниях просим сообщать по адресу: Москва, 103051, К-51, Неглинная ул., 29/14, издательство «Высшая школа».

ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В задачнике, кроме традиционного задания электрических цепей в виде схем, используется описание цепей с помощью троек чисел, которые учитывают все топологические особенности цепей.

Первое число, входящее в каждую тройку, является номером соответствующей ветви, а два последующих — номерами узлов, к которым подключается данная ветвь. Для ветвей, содержащих источники, отсчет узлов производится от « \rightarrow » к « $+$ » — для источников напряжения и по направлению тока — для источников тока.

В задачах в качестве ветвей приняты либо отдельные элементы, либо их последовательные и параллельные соединения. В условиях задачи после записи топологических особенностей цепи тройками чисел раскрывается содержание ветвей.

В качестве примера рассмотрим схему электрической цепи на рис. 0.1. Топологические особенности ее можно описать следующими тройками чисел: 1,3,1; 2,1,3; 3,1,2; 4,2,3; 5,3,2. Содержание ветвей: 1 — последовательное соединение источника u_0 и R_1 ; 2 — последовательное соединение R_2 и L ; 3 — параллельное соединение R_3 и C ; 4 — R_4 ; 5 — источник i_0 . В гл. 3, 5, 8, 9, 11 задачника использованы специфические

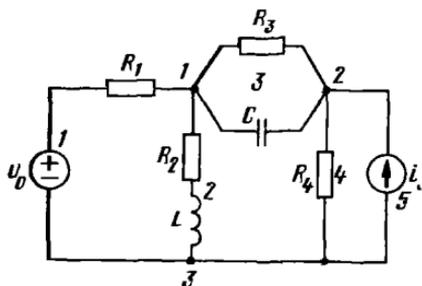


Рис. 0.1

обозначения величин и функций, поэтому при работе с пособием необходимо прочитывать краткие введения к главам (если они имеются). Обязательно следует обращать внимание на особенности записи некоторых математических операций, принятые в ответах к задачам.

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНЫХ ПАССИВНЫХ ЦЕПЕЙ

1.1. Положительное направление тока $i(t)$ в некотором резистивном элементе R электрической цепи указано на схеме стрелкой (рис. 1.1). Изменение электрического заряда, проходящего по элементу, определяется функцией $q(t) = 2 \cos \pi t$. Записать выражение $i(t)$ и указать фактическое направление тока, а также направление движения отрицательных зарядов для моментов времени: $t_1 = 0,5$ с; $t_2 = 0,75$ с.

1.2. Для ветви электрической цепи (рис. 1.1) указать положительное направление напряжения, согласованное с указанным на

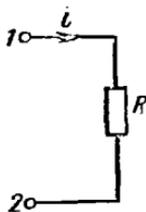


Рис. 1.1

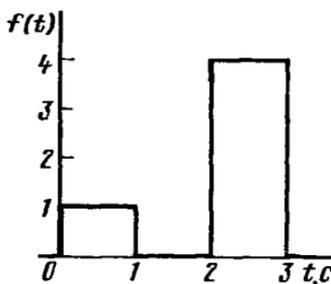


Рис. 1.3

схеме положительным направлением тока. Определить знак напряжения (фактическую полярность выводов 1 и 2 ветви) для момента времени $t = 1$ с, если ток $i = 1 - 3e^{-t}$.

1.3р. На рис. 1.3 показан график напряжения $u = f(t)$ (напряжение в вольтах), приложенного к резистивному элементу $R = 2$ Ом. Определить: 1) величину тока в моменты времени $t_1 = 0,5$ с, $t_2 = 1,5$ с, $t_3 = 2,5$ с; 2) количество энергии, выделившейся в виде тепла в течение времени от $t = 0$ до $t = 3$ с.

1.4. Мгновенная мощность, потребляемая резистивным элементом ($R > 0$), изменяется по закону, указанному на графике (рис. 1.3). Построить (качественно) возможные графики тока.

1.5. Резистивный элемент $R = 100$ Ом подключен к источнику постоянного напряжения, потребляемая мощность $P = 25$ Вт. Определить ток и мощность источника, если к источнику будет подключено дополнительно сопротивление $R_1 = R$: а) последовательно с R ; б) параллельно с R .

1.6. Резистивный элемент $R=10$ кОм подключен к источнику постоянного тока, напряжение на элементе $U=10$ В. Определить напряжение и мощность источника, если будет подключено дополнительное сопротивление $R_1=3R$: а) последовательно с R ; б) параллельно с R .

1.7. К выводам источника постоянного напряжения $U=100$ В подключен источник постоянного тока $I=1$ А так, что ток I направлен к положительному выводу источника напряжения. Определить мощности источников и указать, какой из них отдает энергию и какой ее потребляет. Как изменятся мощности источников, если в цепь будет включен последовательно резистивный элемент $R=20$ Ом?

1.8р. В схемах цепей постоянного тока (рис. 1.8, а—в) $R=5$ Ом, $U_1=10$ В, $I_2=1$ А, $U_3=5$ В. Определить неизвестные напряжения и токи элементов; показать, что во всех цепях $\Sigma P_k=0$.

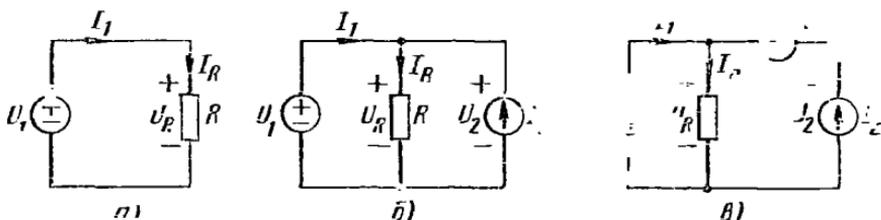


Рис. 1.8

1.9. Источник тока, источник напряжения и резистивный элемент соединены параллельно. Источник тока отдает мощность 80 Вт, источник напряжения потребляет мощность 30 Вт. Определить мощность каждого из перечисленных элементов при последовательном соединении.

1.10р. Электрическая цепь имеет схему, показанную на рис. 1.8, б, но с источниками переменного напряжения $u_1(t)$ и переменного тока $i_2(t)$; $R=2$ Ом, $u_1(t)=4 \sin \frac{2\pi}{T} t$, где T — период колебаний; $i_2(t) = \begin{cases} 2 (0 < t < T/2) \\ -2 (T/2 < t < T) \end{cases}$.

Построить графики i_1 , i_R , u_2 , а также графики мгновенной мощности элементов в интервале времени $0-T$.

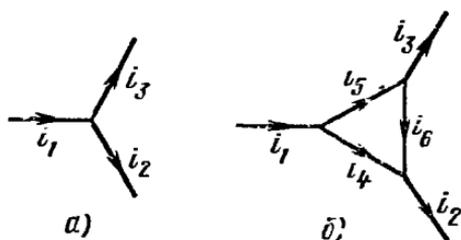


Рис. 1.11

1.11. На рис. 1.11 изображены участки электрических цепей; известны законы изменения токов $i_1=2 \cos \pi t$, $i_2=6 \sin (\pi t - \pi/3)$. Для узла, показанного на рис. 1.11, а, определить величины и фактические направления токов в момент $t=t_1=0,25$ с. Для участка цепи рис. 1.11, б выразить i_3 через токи i_1 и i_2 .

1.12. Система уравнений напряжений составлена для простых контуров (ячеек) плоской (планарной) цепи. Изобразить граф цепи и записать уравнения токов для узлов графа. Составить матрицу соединений (инциденций) для графа цепи

$$\left. \begin{aligned} u_1 - u_5 - u_2 &= 0, \\ u_2 - u_6 + u_3 &= 0, \\ u_6 + u_7 - u_4 &= 0, \\ u_5 - u_8 - u_7 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

1.13. В цепи (рис. 1.13): $R_1=3 \text{ Ом}$, $R_2=2 \text{ Ом}$, $R_3=10 \text{ Ом}$, $R_4=4 \text{ Ом}$, $R_5=6 \text{ Ом}$, $I_{01}=2 \text{ А}$, $U_{02}=3 \text{ В}$, $U_{03}=5 \text{ В}$, $U_{04}=10 \text{ В}$. Определить напряжения U_{14} , U_{21} , U_{23} .

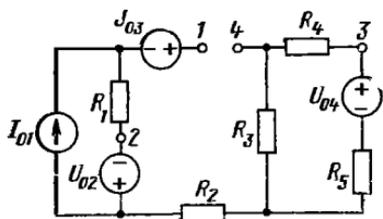


Рис. 1.13

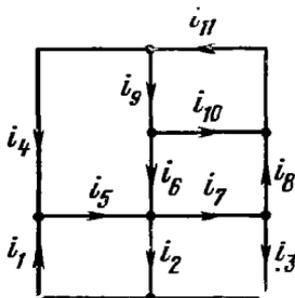


Рис. 1.14

1.14. На рис. 1.14 изображен граф электрической цепи, на котором указаны токи ветвей. Какое минимальное число токов должно быть задано, чтобы можно было определить токи остальных ветвей? Укажите несколько вариантов решения.

1.15р. На рис. 1.15, а—в изображены графики потокосцепления $\Psi=f(t)$ линейного индуктивного элемента ($L=\text{const}$), значения Ψ указаны в веберах. Построить графики тока и напряжения. Определить ток и напряжение на индуктивности $L=0,5 \text{ Гн}$ в момент времени $t=2 \text{ с}$.

1.16. Ток индуктивного элемента $L=2 \text{ Гн}$ определяется выражением $i=1-e^{-t}$ ($t \geq 0$). Найти величину магнитного потока, напряжение на элементе и энергию магнитного поля для момента времени, когда ток достигнет значения $0,95 \text{ А}$.

1.17р. Источник тока подключен к незаряженному емкостному элементу $C=1 \text{ Ф}$; график изменения тока $i=f_2(t)$ указан на рис. 1.15, б, значения тока даны в амперах. Определить u и построить

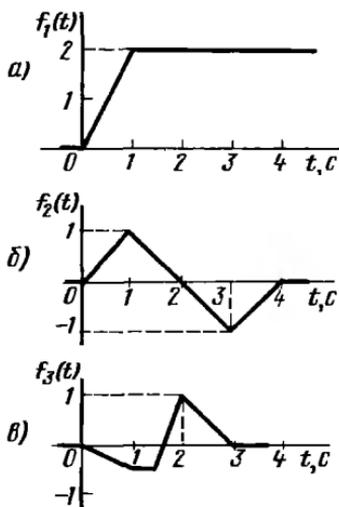


Рис. 1.15

график. Решить задачу для тока источника, заданного графиком рис. 1.3.

1.18. На рис. 1.15 показаны графики изменения напряжения $u = f(t)$ на выводах некоторой емкости. Построить (качественно) $q(t)$ и $i(t)$.

1.19р. Дана цепь (рис. 1.19а). На рис. 1.15, а изображен график напряжения $u = f_1(t)$, напряжение на графике указано в вольтах.

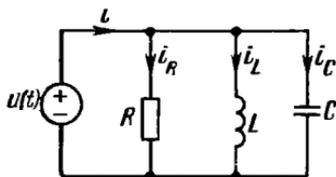


Рис. 1.19а

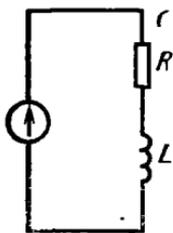


Рис. 1.20

$R=2$ Ом, $L=1$ Г, $C=0,5$ Ф. При $t \leq 0$, $i_L=0$, $u_C=0$. Определить $i_R(t)$, $i_L(t)$, $i_C(t)$, $i(t)$ и построить графики токов. Рассмотреть дуальный вариант задачи.

1.20. В цепи (рис. 1.20) действует источник тока; график изменения тока показан на рис. 1.15, б; значения тока на графике указаны в амперах, $R=2$ Ом, $L=1$ Гн. Определить $u_R(t)$, $u_L(t)$ и $u(t)$ и построить графики этих напряжений. Написать уравнения мощности элементов цепи для интервала времени $0-1$ с. Рассмотреть дуальный вариант задачи.

1.21м. На цепь, составленную из индуктивных элементов (рис. 1.21), с момента времени $t=0$ действует источник постоянного напряжения $U=2$ В, $L_1=1/5$ Гн, $L_2=1$ Гн, $L_3=4$ Гн.

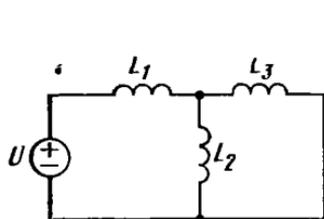


Рис. 1.21

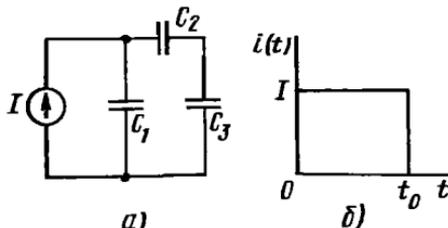


Рис. 1.22

Определить энергию, запасенную в каждой индуктивности к моменту времени $t_1=1$ с, считая, что предварительный запас энергии в цепи отсутствовал. Рассмотреть дуальный вариант задачи.

1.22. На цепь (рис. 1.22, а), не содержащую запаса энергии, с момента времени $t=0$ действует прямоугольный импульс тока (рис. 1.22, б): $C_1=1/10$ Ф, $C_2=1/2$ Ф, $C_3=2$ Ф, $t_0=2$ с. Определить, при каком значении амплитуды импульса I напряжение на емкости C_3 к моменту времени t_0 достигает величины 2 В. Рассмотреть дуальный вариант задачи.

1.23р. На входе цепи (рис. 1.23, а) действует источник некоторого переменного напряжения u . Определить выражения напряжений u_1 и u_2 для случаев, когда в качестве двухполюсников 1 и 2 в цепи использованы: 1) резистивные элементы R_1 и R_2 ; 2) индуктивные элементы L_1 и L_2 ; 3) емкостные элементы C_1 и C_2 . Рассмотреть дуальный вариант задачи.

1.24. На входе цепи (рис. 1.23, б) действует источник некоторого переменного тока i . Определить выражения токов i_1 и i_2 для случаев, когда в качестве двухполюсников 1 и 2 в цепи использованы: 1) резистивные элементы R_1 и R_2 ; 2) индуктивные элементы L_1 и L_2 ; 3) емкостные элементы C_1 и C_2 .

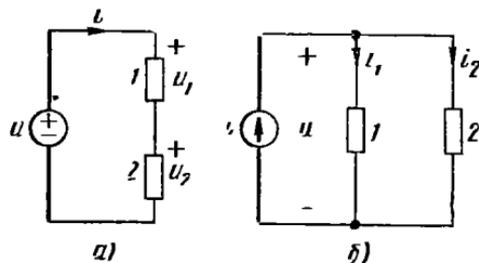


Рис. 1.23

1.25. Напряжение источника, действующего на входе цепи (см. рис. 1.23, а), изменяется по закону $u=2t$ при $t>0$. Определить i , u_1 , u_2 для случаев, когда в качестве двухполюсников 1 и 2 в цепи использованы: 1) резистивные элементы $R_1=1$ Ом, $R_2=4$ Ом; 2) индуктивные элементы $L_1=1$ Гн; $L_2=4$ Гн; 3) емкостные элементы $C_1=1$ Ф, $C_2=4$ Ф.

РЕШЕНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1.3. В линейном резистивном элементе ток и напряжение пропорциональны (закон Ома), $i=Gu$, $G=1/R$. В заданный момент времени $t_1=0,5$ с $i(t_1)=Gu(t_1)=0,5$ А. Ток сохраняется неизменным в промежутке времени ($0<t<1$) в силу постоянства напряжения. Аналогично, в любой точке промежутка ($1<t<2$), в частности, при $t_2=1,5$ с $i(t_2)=Gu(t_2)=0$. В промежутке ($2<t<3$) $i(t_3)=Gu(t_3)=2$ А.

Мощность $p=ui=Gu^2$ и составляет $p=ui=1\cdot 0,5=0,5$ Вт при ($0<t<1$), $p=0$ при ($1<t<2$), $p=ui=4\cdot 2=8$ Вт при ($2<t<3$).

Количество энергии, поступившей в сопротивление с момента времени $t=0$, $w(t)=\int_0^t p dt$.

К моменту времени $t_1=1$ с

$$w(1-)=\int_0^1 0,5 dt=0,5 \text{ Дж.}$$

Так как при ($1<t<2$) $p=0$, то энергия в сопротивление не поступает и $w(2-)=w(1)=0,5$ Дж.

В третьем промежутке $w(t)=w(2)+\int_2^t p dt=0,5+\int_2^t 4 dt=0,5+4(t-2)=4t-7,5$.

При $t=3$ с $\omega(3)=4,5$ Дж.

1.8. а) $U_R=U_1=10$ В, $I_R=U_R/R=10/5=2$ А, $P_R=RI_R^2=$
 $=U_R I_R^2=20$ Вт >0 , $I_1=I_R=2$ А. Положительные направления U_1 и
 I_1 у источника напряжения не согласованы, поэтому $P_1=-U_1 I_1=$
 $=-20$ Вт, $\sum P_k=P_R+P_1=0$;

б) $U_R=U_1=10$ В, $I_R=U_R/R=2$ А, $P_R=U_R I_R=20$ Вт, $I_1=I_R-I_2=$
 $=1$ А (закон токов Кирхгофа). $P_1=-U_1 I_1=-10$ Вт, $U_2=U_R=U_1=$
 $=10$ В, но в источнике тока положительные направления U_2 и I_2
не согласованы, поэтому $P_2=-U_2 I_2=-10$ Вт, $\sum P_k=P_R+P_1+$
 $+P_2=0$;

в) $U_R=U_1=10$ В, $I_R=U_R/R=2$ А, $P_R=U_R I_R=20$ Вт, $I_1=I_R-I_2=$
 $=1$ А, $P_1=-10$ Вт, $U_2=U_R+U_3=15$ В (закон напряжений Кирхго-
фа). $P_2=-U_2 I_2=-15$ Вт, $P_3=U_3 I_3=5$ Вт, так как направления U_3
и I_3 согласованы, $\sum P_k=0$.

1.10. В цепи $u_R=u_2=u_1$, $i_R=\frac{u_R}{R}=\frac{u_1}{R}=2\sin\frac{2\pi t}{T}$

$$p_R=Ri^2=8\sin^2\frac{2\pi t}{T}=4-4\cos\frac{4\pi}{T}\geq 0.$$

По первому закону Кирхгофа

$$i_1=i_R-i_2=\begin{cases} -2+2\sin\frac{2\pi t}{T} & (0 < t < T/2), \\ 2+2\sin\frac{2\pi t}{T} & (T/2 < t < T), \end{cases}$$

$$p_2=-u_2 i_2=\begin{cases} -8\sin\frac{2\pi t}{T} & (0 < t < T/2), \\ 8\sin\frac{2\pi t}{T} & (T/2 < t < T), \end{cases}$$

$$p_1=-u_1 i_1=\begin{cases} 8\sin\frac{2\pi t}{T}-8\sin^2\frac{2\pi t}{T} & (0 < t < T/2), \\ -8\sin\frac{2\pi t}{T}-8\sin^2\frac{2\pi t}{T} & (T/2 < t < T). \end{cases}$$

Графики функций показаны на рис. 1.10.

1.15. Известно, что в индуктивном элементе $\Psi=Li$ $u=\frac{d\Psi}{dt}$.

При $L=\text{const}$ графики i будут подобны графикам Ψ (см. рис. 1.15, а—в). Так как все участки графиков Ψ являются отрезками прямых линий (кусочно-линейная функция), то производная $\frac{d\Psi}{dt}$ может быть представлена в каждом интервале как отношение приращений потокосцепления и времени $\frac{\Delta\Psi}{\Delta t}$. Например, для $\Psi(t)$,

заданного графиком рис. 1.15, б в интервале $(t_0 \div t_1) = (0 \div 1)$

$$u = \frac{\Delta \Psi}{\Delta t} = \frac{\Psi(1) - \Psi(0)}{t_1 - t_0} = \frac{1 - 0}{1 - 0} = 1 \text{ В};$$

в интервале $(1 \div 3)$

$$u = \frac{(-1) - 1}{3 - 1} = -1 \text{ В};$$

в интервале $(3 \div 4)$ $u = 1$ В. При $t = 1$ с и $t = 3$ с функция $u(t)$ имеет разрывы непрерывности.

1.17. Так как по условию $u_C(0-) = 0$, то напряжение на емкостном элементе при $t > 0$

$$u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt.$$

Ток источника тока представляет кусочно-линейную функцию времени

$$i(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t \leq 1), \\ -(t-2) & (1 \leq t \leq 3), \\ t-4 & (3 \leq t \leq 4). \end{cases}$$

Напряжение на емкости в интервале $0 \leq t \leq 1$

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i dt = \frac{1}{1} \int_0^t t dt = \frac{1}{2} t^2; \quad u_C(1) = 0,5 \text{ В}.$$

В промежутке $1 \leq t \leq 3$

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{1}{C} \int_0^1 i dt + \frac{1}{C} \int_1^t i dt = u_C(1) + \frac{1}{1} \int_1^t -(t-2) dt = \\ &= 1 - 0,5(t-2)^2. \end{aligned}$$

В промежутке $3 \leq t \leq 4$

$$u_C(t) = u_C(3) + \frac{1}{C} \int_3^t i dt = 0,5(t-4)^2.$$

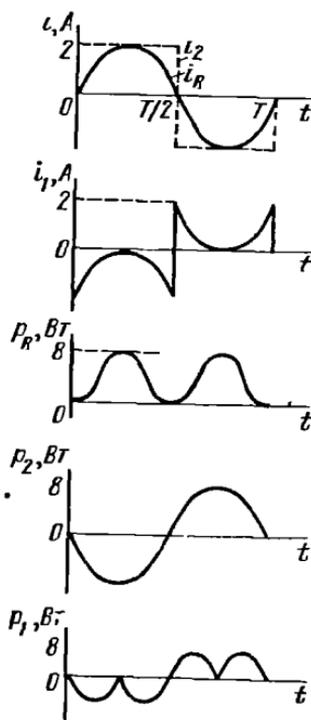


Рис. 1.10

На рис. 1.17 изображен график $u_C(t)$.

1.19. Напряжение источника при $t > 0$

$$u(t) = \begin{cases} 2t & (0 \leq t \leq 1), \\ 2 & (t \geq 1). \end{cases}$$

Ток в резистивном элементе $i_R = u/R$

$$i_R(t) = \begin{cases} 2t/R = t & (0 \leq t \leq 1), \\ U/R = 1 & (t \geq 1). \end{cases}$$

Ток в индуктивном элементе $i_L = \frac{1}{L} \int_0^t u dt$ (при $t < 0$, $i_L(0) = 0$).

$$i_L(t) = \begin{cases} t^2 & (0 \leq t \leq 1), \\ 2t - 1 & (t \geq 1). \end{cases}$$

Особенности определения интеграла от функции, заданной кусочно, рассмотрены в решении задачи 1.17.

Ток в емкостном элементе

$$i_C(t) = C \frac{du}{dt} = \begin{cases} 1 & (0 < t < 1), \\ 0 & (t > 1). \end{cases}$$

Ток источника

$$i = i_R + i_L + i_C = \frac{u}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t u dt + C \frac{du}{dt} = \begin{cases} t^2 + t + 1 & (0 < t < 1), \\ 2t & (t > 1). \end{cases}$$

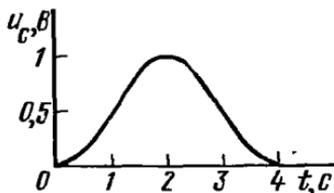


Рис. 1.17

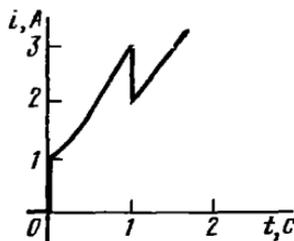
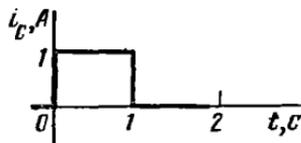
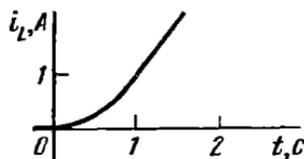
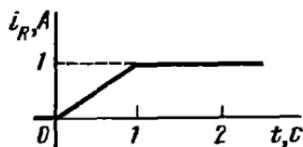


Рис. 1.196

Графики токов показаны на рис. 1.196.

1.21. Дуальная цепь изображена на рис. 1.22, а.

1.23. Ток в цепи с резистивными элементами $i = u/(R_1 + R_2)$; следовательно, $u_1 = R_1 i = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u$; $u_2 = R_2 i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u$.

В цепи с индуктивными элементами по закону напряжений Кирхгофа

$$u = u_1 + u_2 = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} = (L_1 + L_2) \frac{di}{dt}.$$

Следовательно,

$$u_1 = \frac{L_1}{L_1 + L_2} u; \quad u_2 = \frac{L_2}{L_1 + L_2} u.$$

В цепи с емкостными элементами

$$u = u_1 + u_2 = \frac{1}{C_1} \int_0^t idt + \frac{1}{C_2} \int_0^t idt = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \int_0^t idt$$

(предполагается, что при $t < 0$ $u = 0$, $u_1 = 0$ и $u_2 = 0$). Следовательно,

$$u_1 = \frac{1/C_1}{1/C_1 + 1/C_2} u = \frac{C_2}{C_1 + C_2} u; \quad u_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} u.$$

Выражения токов i_1 и i_2 для дуальной цепи (см. рис. 1,23, б) следуют из полученных ранее выражений напряжений после замены входящих в них величин дуальными: $u \rightarrow i$, $R \rightarrow G$, $L \rightarrow C$, $C \rightarrow L$.

ГЛАВА 2

АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ МЕТОДАМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ. ВХОДНЫЕ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

2.1. Для резистивных цепей (рис. 2.1) определить входные сопротивления относительно выводов 1, 2. Принять для цепи рис. 2.1, а: $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $R_3 = 6$ Ом, $R_4 = 2$ Ом, $R_5 = 5$ Ом, $R_6 =$

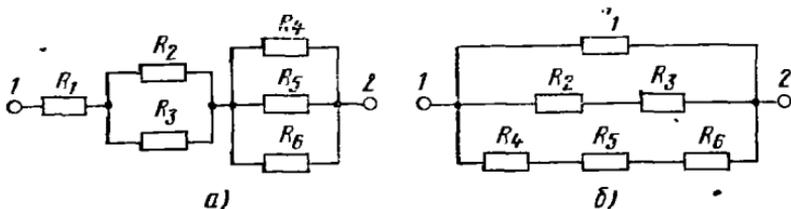


Рис. 2.1

$= 10$ Ом. Для цепи рис. 2.1, б: $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 6$ Ом, $R_3 = 14$ Ом, $R_4 = 5$ Ом, $R_5 = 7$ Ом, $R_6 = 8$ Ом. В каком соотношении будут находиться входные сопротивления двух цепей, если они будут выполнены из резистивных элементов, имеющих одинаковые по величине сопротивления $R_k = R$?

2.2м. Дана резистивная цепь (рис. 2.2) $R_1=R_2=\dots R_6=1,0$ Ом. Определить входные сопротивления цепи относительно узлов 1—2, 2—4, 2—3, 1—3 ($R_{12}, R_{24}, R_{34}, R_{13}$) в общем виде и численно.

2.3. Определить входное сопротивление $R_{вх}=\mu_0/i_0$ и передаточную проводимость $G_{05}=\dot{i}_5/\mu_0$ мостовой схемы (рис. 2.3); найти ток

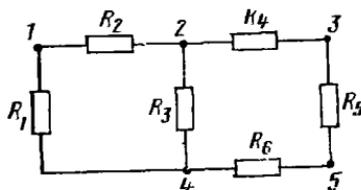


Рис. 2.2

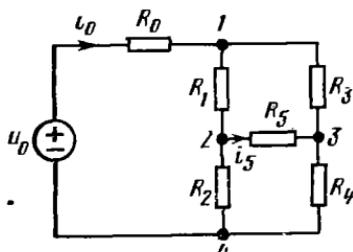


Рис. 2.3

в сопротивлении R_5 при $\mu_0=U_0=1,6$ В, $R_0=1,8$ Ом, $R_1=4$ Ом, $R_2=8$ Ом, $R_3=6$ Ом, $R_4=7$ Ом, $R_5=10$ Ом.

2.4. Получить выражение функции цепи $H_u=\mu_{12}/\mu_0$ мостовой схемы (рис. 2.4) и определить условие, при котором $H_u=0$. Изменится ли выражение H_u , если на входе цепи вместо источника напряжения будет подключен источник тока?

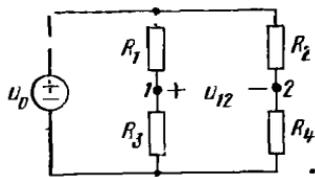


Рис. 2.4

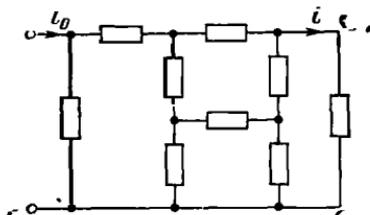


Рис. 2.5

2.5. Для цепи рис. 2.5, сопротивления ветвей которой равны 1 Ом, найти входную проводимость и коэффициент передачи токов i/i_0 .

2.6м. На рис. 2.6 дана резистивная цепь, сопротивления которой равны в омах: $R_0=15$, $R_1=R_2=R_3=30$, $R_4=R_5=6$, $R_6=2$, $R_7=10$, $R_8=R_9=20$. Определить входное сопротивление цепи и коэффициент передачи напряжения $H_u=\mu_{R4}/\mu_0$.

2.7. На рис. 2.7 показано резистивное устройство в виде кольца и подвижной перемычки, расположенной по диаметру кольца.

Сопротивления полуколец одинаковы и равны R . Найти входное сопротивление устройства относительно выводов 1—2 в функции от угла φ для двух значений сопротивления перемычки: 1) $R_{п}=0$; 2) $R_{п}=R$.

2.8м. Найти входные сопротивления между выводами 1—2, 1—4, 1—8 цепи, ветви которой с сопротивлениями 1 Ом образуют кубическую структуру (рис. 2.8).

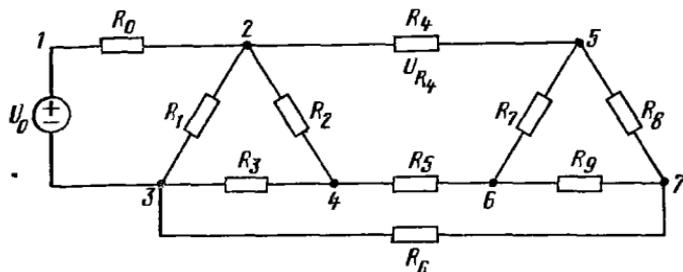


Рис. 2.6

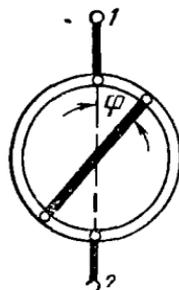


Рис. 2.7

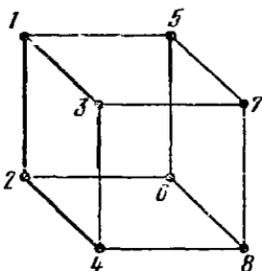


Рис. 2.8

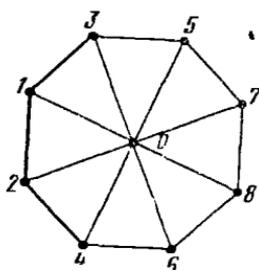


Рис. 2.9

2.9м. Найти входные сопротивления между выводами 1—2, 3—4, 1—4, 3—6 цепи, ветви которой с сопротивлениями 1 Ом образуют структуру, показанную на рис. 2.9.

2.10. На рис. 2.10 даны схемы двух разновидностей лестничных резистивных цепей. Записать в виде цепной дроби выражения вход-

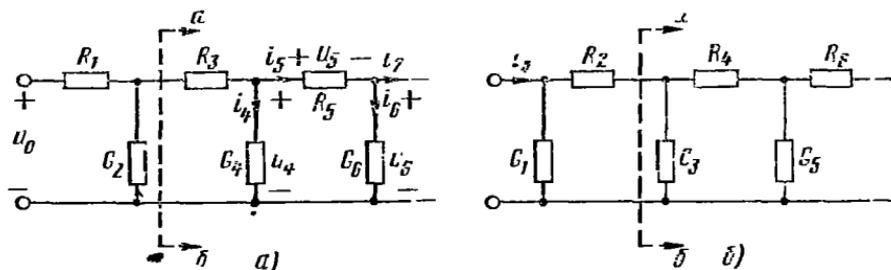


Рис. 2.10

ного сопротивления (рис. 2.10, а) и входной проводимости (рис. 2.10, б). Вычислить входные сопротивления цепей, приняв сопротивления всех ветвей $R_k = 10 \text{ Ом}$.

2.11м. Определить предельные величины входных сопротивлений лестничных цепей (рис. 2.10), составленных из одинаковых резистивных элементов R , при бесконечном числе звеньев цепей.

2.12м. Показать, что входное сопротивление цепи (рис. 2.10, а) при бесконечном числе ее элементов $R_{вх} = \sqrt{2}$ Ом, если параметры элементов характеризуются множеством $\{R_1, G_2, R_3, R_4, \dots\} = \{1, 2, 2, 2, \dots\}$. Величины сопротивлений указаны в омах, проводимостей — в сименсах.

2.13. Используя возможность представления иррациональных чисел в виде бесконечных цепных дробей, определить параметры бесконечных лестничных цепей, составленных из обратных Г-образных звеньев (участки цепи R_1G_2, R_3G_4, \dots на рис. 2.10, а) и имеющих входные сопротивления $R_{вх} = \sqrt{3}$ Ом и $\sqrt{5}$ Ом.

2.14. Используя метод пропорциональных величин, определить для резистивной цепи (рис. 2.10, а) выражения входного сопротивления и функции цепи $H_u = u_6/u_0$. Показать, что числители и знаменатели $R_{вх}$ и H_u линейно зависят от любого сопротивления цепи, т. е. $R_{вх}$ и H_u могут быть представлены в виде билинейных дробных выражений

$$\frac{a + bR_k}{c + dR_k},$$

где R_k — некоторое сопротивление цепи (некоторые из коэффициентов a, b, c, d в частных случаях могут быть равны нулю).

2.15р. Для лестничных резистивных цепей с источником напряжения на входе (рис. 2.10, а) составить алгоритмы и блок-схемы вычисления:

1) входного сопротивления, используя представление $R_{вх}$ в виде цепной дроби;

2) входного сопротивления $R_{вх}$ и функции цепи $H_u = u_{вых}/u_{вх}$, используя метод пропорциональных величин.

2.16р. Из резистивных элементов $R = 2$ Ом составить схемы лестничных цепей, имеющих входные сопротивления (в омах): а) 5; 5,4; 5,3; б) 1,5; 1,2; 1,27. Предложить алгоритм и блок-схему получения цепей из резисторов R , реализующих с заданной точностью ϵ_R (например, $\epsilon_R = 0,01$) некоторую величину входного сопротивления $R_{вх} > R$ или $R_{вх} < R$ ($G_{вх} > G$).

2.17м. Геометрическая структура резистивной цепи задана тройками чисел: 1,4,1; 2,1,2; 3,2,4; 4,2,3; 5,3,4; первый элемент цепи — источник напряжения $U_1 = 20$ В, остальные — резистивные элементы, сопротивления которых (в омах): $R_2 = 4, R_3 = 10, R_4 = 5, R_5 = 10$. Определить коэффициент передачи напряжения $H_U = U_{R5}/U_1$ и входную проводимость методом пропорциональных величин.

2.18р. В резистивной цепи (рис. 2.18) $I_0 = 6$ А, $U_0 = 6$ В, сопротивления всех резистивных элементов $R_1 = R_2 = \dots = R_7 = 1$ Ом. Найти токи ветвей методом определяющих величин.

2.19. Определить входное сопротивление цепи (рис. 2.18) относительно выводов источника тока; принять $U_0 = 0, R_1 = R_2 = \dots = R_7 = 1$ Ом.

2.20. Для резистивной цепи (рис. 2.20) определить выражение входного сопротивления и функцию цепи $H_u = u_2/u_1$, приняв $R_3 = R_4 = R_5 = R_0$. Показать, что при выполнении условия $R_1 R_2 = R_0^2$ входное сопротивление $R_{вх} = R_0$, а $H_u = R_0 / (R_0 + R_1) = R_2 / (R_0 + R_2)$. Определить выражения сопротивлений R_1 и R_2 , необходимые для получения некоторого заданного значения H_u (например, $H_u = 0,18$).

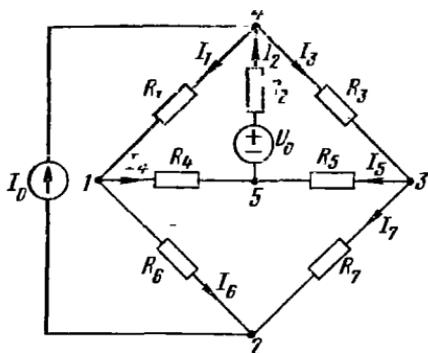


Рис. 2.18

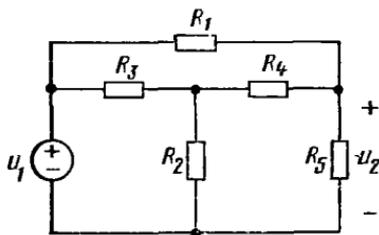


Рис. 2.20

2.21. В цепи (рис. 2.20) известны величины u , R_1 , R_2 , R_3 и R_4 ; требуется найти величину R_5 , используя для этой цели вольтметр (считать при этом все узлы цепи доступными для подключения прибора). Какое минимальное количество измерений следует сделать? Предложите несколько вариантов решения задачи.

2.22. В резистивной цепи (рис. 2.20) вместо источника напряжения, изображенного на схеме, действует источник постоянного тока $i_0 = I_0 = 4$ А; сопротивления элементов $R_1 = R_3 = R_5 = 1$ Ом, $R_2 = R_4 = 2$ Ом. Определить токи ветвей методом определяющих величин.

2.23. В резистивной цепи (рис. 2.23): $U_1 = 16$ В, $U_2 = 12$ В, $R_1 = R_3 = 2$ Ом, $R_2 = 3$ Ом. Определить напряжение на сопротивлении R_3 . Найти величину напряжения U_2 , при которой ток в сопротивлении R_3 будет равен нулю.

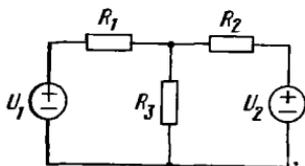


Рис. 2.23

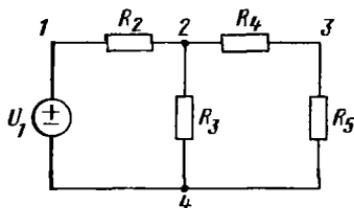


Рис. 2.24

2.24. Дана резистивная цепь (рис. 2.24). Определить сопротивление R_4 , при котором будет выполняться условие передачи в нагрузку R_5 максимальной мощности; найти $P_{5 \max}$, если $U_1 = 6$ В, $R_2 = R_5 = 1$ Ом, $R_3 = 4$ Ом.

2.25. Используя метод определяющих величин, найти ток I_3 , если сопротивления ветвей цепи постоянного тока (рис. 2.25) $R_1 = R_2 = R_3 = 1 \text{ Ом}$, $U_1 = 6 \text{ В}$, $U_2 = 3 \text{ В}$, $I = 3 \text{ А}$. Установить, какие элементы потребляют мощность, а какие ее отдают.

2.26р. Дана резистивная цепь; структура цепи определена тройками чисел: 1,4,1 (источник тока $I_1 = 4 \text{ А}$); 2,2,4 ($R_1 = 3 \text{ Ом}$); 3,1,2

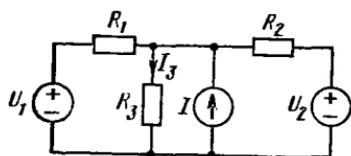


Рис. 2.25

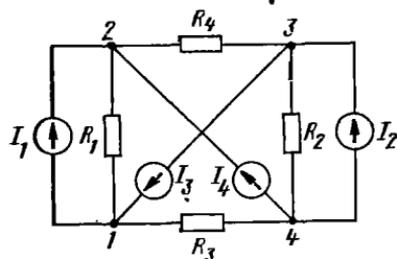
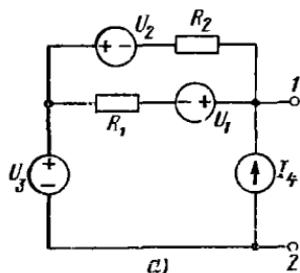


Рис. 2.27

($R_2 = 2 \text{ Ом}$); 4,2,4 (источник тока $I_2 = 1,5 \text{ А}$); 5,1,3 (источник напряжения $U_3 = 4,5 \text{ В}$); 6,3,4 ($R_3 = 3 \text{ Ом}$). Определить ток в сопротивлении R_3 , используя метод преобразования источников.

2.27. Дана цепь (рис. 2.27): $I_1 = 1,1 \text{ А}$, $I_2 = 0,9 \text{ А}$, $I_3 = 2 \text{ А}$, $I_4 = 0,5 \text{ А}$, $R_1 = 2 \text{ Ом}$, $R_2 = 3 \text{ Ом}$, $R_3 = 1 \text{ Ом}$, $R_4 = 2 \text{ Ом}$. Определить напряжение на сопротивлении R_4 .



а)

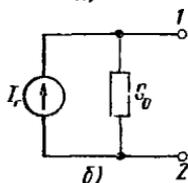
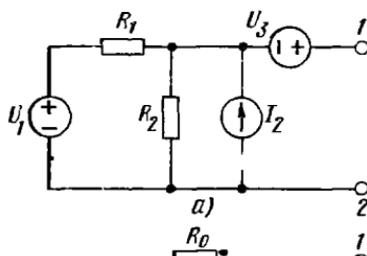


Рис. 2.28



а)

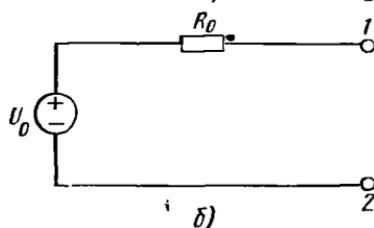


Рис. 2.29

2.28р. Используя метод эквивалентных преобразований источников, представить цепь относительно выводов 1, 2 (рис. 2.28, а) в виде схемы замещения с параллельным соединением источника тока I_0 и проводимости G_0 (рис. 2.28, б). Принять $U_1 = 18 \text{ В}$, $U_2 = 32 \text{ В}$, $U_3 = 18 \text{ В}$, $I_4 = 0,5 \text{ А}$, $R_1 = 60 \text{ Ом}$, $R_2 = 40 \text{ Ом}$.

Используя теорему об эквивалентном источнике, определить напряжение $U_{1,2}$ при подключении на выходы 1—2 $R_H = 12 \text{ Ом}$.

2.29. Представить цепь (рис. 2.29, *a*) в виде схемы с источником напряжения U_0 и сопротивлением R_0 (рис. 2.29, *б*). Определить предельные значения напряжения U_0 на выводах 1—2 и сопротивления R_0 при изменении R_1 от нуля до бесконечности.

2.30м. Дана электрическая цепь (рис. 2.30). Используя методы преобразования источников, определить параметры эквивалентной

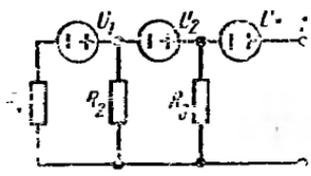


Рис. 2.30

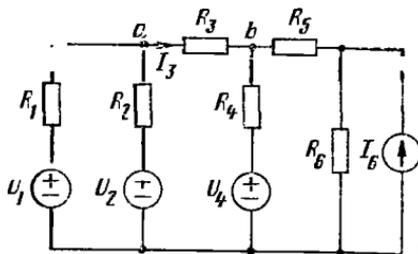


Рис. 2.31

схемы с источником напряжения U_0 и сопротивлением R_0 относительно выводов 1—2. Изобразить дуальную цепь и записать выражения параметров эквивалентной ей цепи с источником тока.

2.31. Схема цепи показана на рис. 2.31; сопротивления в омах: $R_1=1$, $R_2=R_4=2$, $R_3=3$, $R_5=R_6=4$, $U_1=10$ В, $U_2=5$ В, $U_4=2$ В, $I_6=1$ А. Используя теоремы об эквивалентных источниках, определить I_3 .

2.32. На рис. 2.29, *б* дана схема замещения источника электромагнитной энергии, содержащая источник постоянного напряжения U_0 и сопротивление R_0 . Для определения величин U_0 и R_0 к выводам 1—2 источника подключают некоторые резисторы с известными сопротивлениями R_1, R_2, \dots, R_k и измеряют напряжения на них. Сколько опытов и с какими величинами R_k нужно выполнить для нахождения U_0 и R_0 ?

2.33. На рис. 2.33 изображены схемы электрических цепей, содержащих по два резистивных элемента R_{01}, R_{02} и источники напряжения U_0 или тока I_0 . Для нахождения величин R_{01}, R_{02}, U_0 (или I_0) к выводам 1—2 цепей подключают некоторые резисторы с известными сопротивлениями R_1, R_2, \dots, R_k и измеряют напряжения на них. Сколько опытов с различными значениями нужно выполнить для определения параметров каждой из цепей? Допускает ли данная методика определение всех

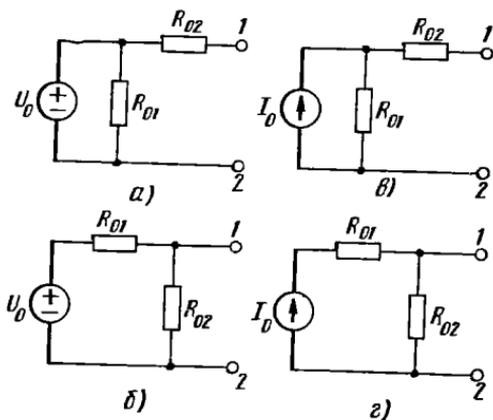


Рис. 2.33

трех параметров каждой из цепей? Если методика не допускает определения всех трех параметров, то какие из величин R_{01} , R_{02} , U_0 (I_0) непосредственно или зависящие от них эквивалентные параметры цепи могут быть определены?

2.34. В цепи (рис. 2.34) действуют источники постоянных напряжений $U_1=13$ В, $U_2=37$ В и источник постоянного тока $I=2$ А, $R=2$ Ом. Какой элемент цепи должен быть подключен параллельно R , чтобы ток i_R стал равным 2; 1; 0,5; 0; -2 А? Для каждого заданного значения i_R рассмотреть возможные варианты элементов.

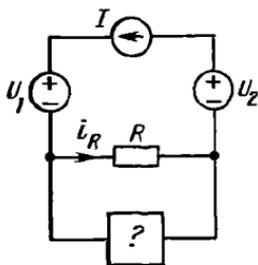


Рис. 2.34

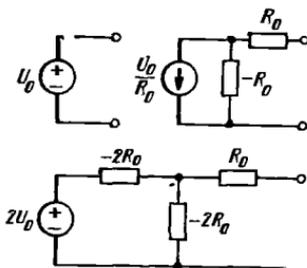


Рис. 2.35

2.35. Показать эквивалентность цепей, изображенных на рис. 2.35.

РЕШЕНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

2.2. При нахождении R_{13} целесообразно применить преобразование треугольника сопротивлений (например, R_1 , R_2 , R_3) в эквивалентную звезду.

2.6. Использовать эквивалентное преобразование треугольника сопротивлений в звезду и звезды в треугольник.

2.8. Использовать условия симметрии цепи.

2.9. Использовать условия симметрии цепи.

2.11. При бесконечном числе Г-образных звеньев цепей входные сопротивления частей цепей, отсекаемых по линии ab (см. рис. 2.10), будут равны входному сопротивлению соответствующей цепи.

2.12. Для вычисления входного сопротивления цепи с исключенным сопротивлением R_1 использовать указание к задаче 2.11.

2.15. Выражение входного сопротивления лестничной цепи, имеющей n ветвей, может быть записано в виде цепной дроби

$$R_{\text{вх}} = R_1 + \frac{1}{G_2 + \frac{1}{R_3 + \frac{1}{G_4 + \frac{1}{R_5 + \frac{1}{G_6 + \frac{1}{R_7 + \frac{1}{G_8 + \frac{1}{R_9 + \frac{1}{G_{n-2} + \frac{1}{R_{n-1} + 1/G_n}}}}}}}}}}}} =$$

$$= a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_{n-2} + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}$$

Используя для нахождения $R_{вх}$ схему Горнера, получим такую последовательность операций:

1-й шаг ($k=1$): $b_k = b_1 = 1/a_n = 1/G_n$; $c_k = c_1 = a_{n-1} + b_1 = R_{n-1} + 1/G_n$;

2-й шаг ($k=2$): $b_2 = 1/c_1$; $c_2 = a_{n-2} + b_2$;

.....
 ($n-1$) шаг ($k=n-1$): $b_{n-1} = 1/c_{n-2}$; $c_{n-1} = a_1 + b_{n-1} = R_{вх}$, которую при $n > 3$ можно представить в виде схемы алгоритма (рис. 2.15, а). В этой схеме символом $:=$ обозначена операция присвоения

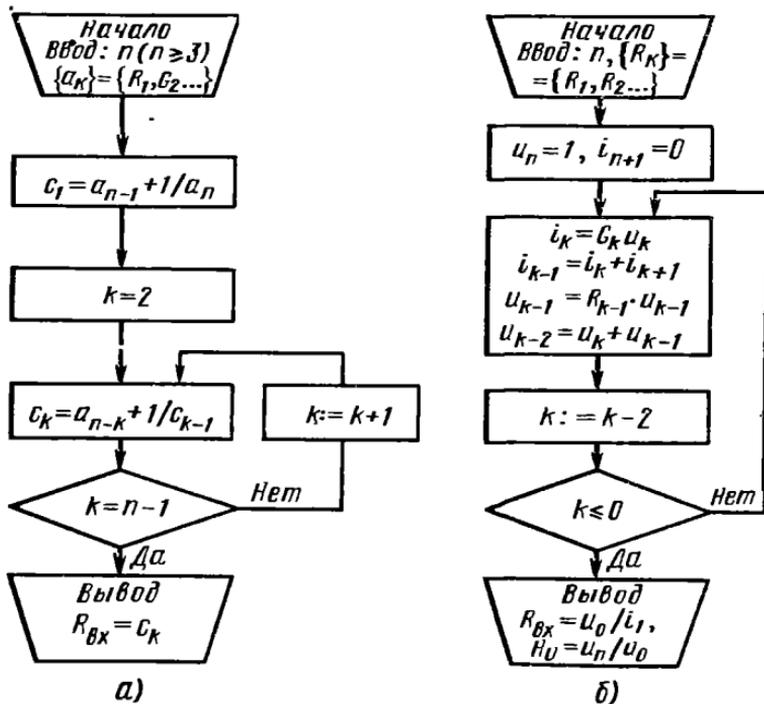


Рис. 2.15

ния. Блок-схема не включает простейших случаев $n=1, 2$, для которых соответственно $R_{вх} = R_1$ и $R_{вх} = R_1 + 1/G_2$.

Для метода пропорциональных величин схема алгоритма представлена на рис. 2.15, б. Номера ветвей k отсчитываются от входа цепи, общее число ветвей принято равным n . Анализ цепи сводится к поочередному расчету обратных Г-образных звеньев, начиная с последнего. Так, например, для нахождения $R_{вх}$ и H_u цепи рис.

2.10, *a*, имеющей 6 ветвей ($n=6$), принимаем $u_k = u_n = u_6 = 1$. Тогда $i_k = G_k u_k$ ($i_6 = G_6 u_6 = G_6$), $i_{k-1} = i_k + i_{k+1} = i_k$ ($i_5 = i_6$), так как для последнего звена цепи $i_{k+1} = i_{n+1} = i_7 = 0$. После этого находим $u_{k-1} = R_{k-1} i_{k-1}$ ($u_5 = R_5 i_5$), $u_{k-2} = u_k + u_{k-1}$ ($u_4 = u_6 + u_5$) и переходим к аналогичному расчету предыдущего звена. Повторив $n/2$ раз описанную процедуру, получим ток i_1 и напряжение* u_0 на входе цепи, а также $R_{вх} = u_0/i_1$ и $H_u = u_n/u_0$.

2.16. Рассмотрим реализацию цепи по заданному $R_{вх} > R$. В этом случае схема лестничной цепи будет состоять из обратных Г-образных звеньев (участки $R_1 G_2, R_3 G_4$ и т. д. на рис. 2.10, *a*). Пусть k — номер ветви ($k=1, 3, 5, \dots$ для продольных и $k=2, 4, 6, \dots$ для поперечных ветвей). Обозначим сопротивления продольных ветвей через R_x , поперечных — R_y . При $R_{вх} > R$ продольные ветви могут содержать последовательно соединенные элементы R ($R_x = n_k R$), а поперечные — параллельно соединенные R ($R_y = R/n_k$). Таким образом, задача заключается в определении множества целых чисел $\{n_k\}$.

Для первого звена (см. рис. 2.10, *a*) $R_x = R_1 = n_1 R$ и $R_y = R_2 = 1/G_2 = R/n_2$. Находим R_x , выделяя из $R_{вх}$ часть кратную R . Обозначив целую часть символом $[]$, получим $n_1 = [R_{вх}/R]$ и $R_1 = R_x|_{k=1} = n_1 R$. Реализация цепи на этом этапе может закончиться, если $R_{вх}$ кратно R или сопротивление $R_1 = nR$ реализует $R_{вх}$ с заданной точностью ϵ_R . Поэтому следует вычислить $R'_{вх}$, используя алгоритм, приведенный в задаче 2.15 (для первого этапа $R_{вх}'$ будет равно $R_1 = n_1 R$); составить разность $\Delta R_{вх} = R_{вх} - R'_{вх}$ и оценить величину отношения $\Delta R_{вх}/R_{вх}$.

Если $(\Delta R_{вх}/R_{вх}) > \epsilon_R$, продолжаем реализацию и находим $R_y = R_{вх} - R_1$, $n_2 = [R/R_y]$, а затем и $R_2 = R_y|_{k=2} = R/n_2$. После этого вычисляем уточненное значение $R'_{вх}$, находим $\Delta R_{вх}$ и проверяем уточненную цепь на точность реализации.

Если цепь с элементами R_1, R_2 не удовлетворяет заданной точности, переходим к определению параметров второго звена начиная с $R_x|_{k=3} = R_3$ (см. рис. 2.10, *a*).

Величину R_3 выбираем из условия получения требуемого $R_y = R_{вх} - R_x$. Если $R_4 = 0$, то R_3 будет включено параллельно R_2 и, следовательно, для точной реализации R_y должно выполняться условие

$$R_y = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{(R n) R_3}{(R n) + R_3},$$

откуда

$$R_3 = \frac{(R' n_2) R_y}{(R/n_2) - R_y}.$$

* Величины i_1 и u_0 получены в предположении, что $u_n = 1$. Для получения действительных значений токов и напряжений ветвей они должны быть изменены в отношении u/u_0 , где u — напряжение источника на входе цепи.

Спротивление R_3 реализуется в виде последовательного соединения $R_3 = R_x |_{k=3} = n_3 R$, где $n_3 = [R_y / R]$. На этом замыкается цикл алгоритма, схема которого показана на рис. 2.16.

2.17. Схема цепи показана на рис. 2.24.

2.18. Сущность метода определяющих величин заключается в том, что одна, две (в общем случае, n) искомыми величинами I или U принимают в качестве определяющих и через них, с использованием законов Кирхгофа, выражают остальные искомые величины. В итоге должна быть получена система уравнений для нахождения определяющих величин, а затем и всех остальных.

В рассматриваемом примере примем $I_6 = x$, $I_4 = y$. Для узлов 1 и 2 $I_1 = I_6 + I_4 = x + y$, $I_7 = I_0 - I_6 = 6 - x$. Для контура 1-5-3-2-1 $0 = U_4 - U_5 + U_7 - U_6 = R_4 I_4 - R_5 I_5 + R_7 I_7 - R_6 I_6$, откуда с учетом равенства всех $R_h = 1$ Ом $I_4 - I_5 + I_7 - I_6 = 0$ и $I_5 = 6 - 2x + y$. Аналогично находим выражения токов $I_2 = I_4 + I_5 = 6 - 2x + 2y$ и $I_3 = I_5 + I_7 = 12 - 3x + y$. Теперь, когда все токи выражены через величины x и y , составляем уравнения напряжений для контуров 1-4-5-1 и 5-4-3-5, которые не были использованы ранее, и находим уравнения для определения x и y : $x - 4y = 0$; $7x - 4y = 18$.

Из уравнений $x = 3$, $y = 0,75$; искомые токи цепи $I_1 = 3,75$ А, $I_2 = 1,5$ А, $I_3 = 3,75$ А, $I_4 = 0,75$ А, $I_5 = 0,75$ А, $I_6 = 3$ А, $I_7 = 3$ А.

2.26. Используя метод «внесения» источника тока в контур, представляем заданную цепь рис. 2.26, а в виде схемы (рис. 2.26, б), которую затем преобразуем в последовательную цепь с источником напряжения (рис. 2.26, в):

$$U_0 = R_1(I_1 - I_2) + R_2 I_1 + U_3 = 3(4 - 1,5) + 2 \cdot 4 + 4,5 = 20 \text{ В};$$

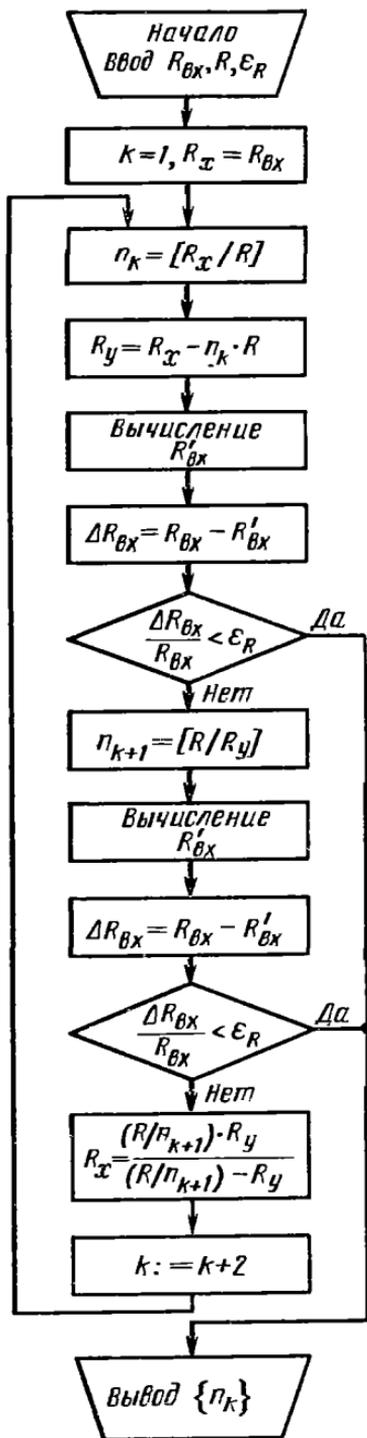


Рис. 2.16

$$R_0 = R_1 + R_2 + R_3 = 8 \text{ Ом}, I_{R_0} = U_0/R_0 = 2,5 \text{ А.}$$

2.28. Преобразуем источники напряжения U_2 и U_1 в источники тока: $I_2 = U_2/R_2 = 0,8 \text{ А}$; $I_1 = U_1/R_1 = 0,3 \text{ А}$ (рис. 2.28в), которые затем сводятся к одному источнику тока $I_{12} = I_2 - I_1 = 0,5 \text{ А}$ с параллельно подключенным элементом $R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 24 \text{ Ом}$ (рис. 2.28г).

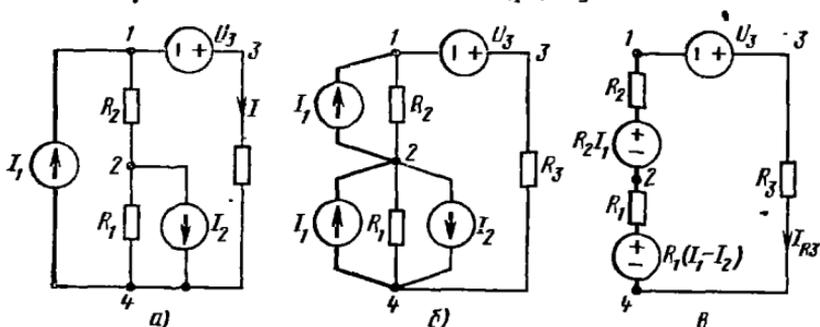


Рис. 2.26

Преобразуя источник тока I_{12} с R_0 в источник напряжения с последовательным R_0 , получим схему (рис. 2.28г), где $U_{12} = R_0 I_{12} = 12 \text{ В}$.

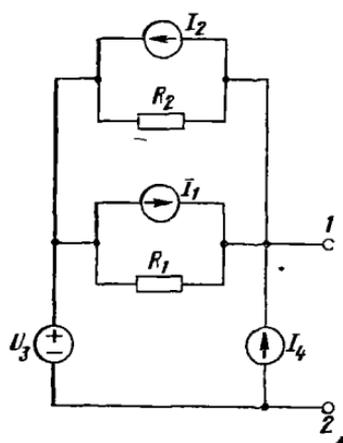


Рис. 2.28в

Объединяя источники U_{12} и U_3 и переходя к схеме с источником тока, окончательно получим ток искомого источника тока

$$I_0 = \frac{U_3 - U_{12}}{R_0} + I_4 = \frac{18 - 12}{24} + 0,5 = 0,75 \text{ А.}$$

Из схемы замещения цепи в виде эквивалентного источника (см. рис. 2.28, б) видно, что при подключении на выводы 1—2 сопротивления R_n (проводимости G_n) напряжение

$$U_{12} = \frac{I_0}{G_0 + G_n} = \frac{0,75}{1/24 + 1/12} = 6 \text{ В.}$$

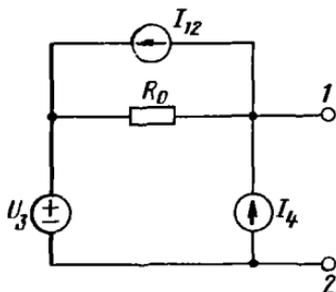


Рис. 2.28г

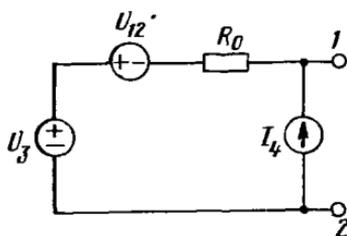


Рис. 2.28д

Отметим, что параметры эквивалентной схемы, изображенной на рис. 2.28, б, могут быть определены при помощи теоремы об эквивалентном источнике — теоремы Нортона (см. гл. 3).

2.30. Преобразование цепи следует начать с левой ветви. При построении дуальной цепи учесть, что разомкнутой ветви в исходной цепи (ветвь 1—2 на рис. 2.30) соответствует короткое замыкание соответствующей ветви дуальной цепи.

ГЛАВА 3

УРАВНЕНИЯ R-ЦЕПЕЙ, ИХ РЕШЕНИЯ И ТЕОРЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

В главе приняты следующие обозначения: A — матрица соединений независимая; Q — матрица сечений; B — матрица контурная.

При использовании матричных методов формирования уравнений R -цепей нумерация ветвей графа должна быть упорядочена. Первые номера присваивают ветвям дерева графа, начиная с ветвей с источниками напряжения, а остальные — хордам (ветвям связи). К хордам относят ветви с источниками тока, которым присваивают последние номера.

При упорядоченной нумерации ветвей матрицы Q и B могут быть представлены в виде

$$Q = [1; F], \quad B = [F'; 1], \quad \text{причем } F' = -F^t,$$

где F — топологическая матрица $n_d \times n_x$, показывающая, какие хорды входят в каждое из главных сечений, образованных соответствующими ветвями дерева.

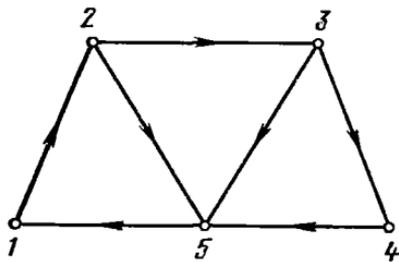


Рис. 3.1а

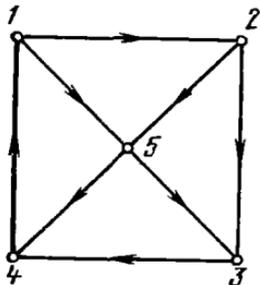


Рис. 3.2

3.1р. Направленный граф некоторой цепи дан на рис. 3.1а; число пронумерованных узлов $n_u = 5$, число ветвей $n_b = 7$.

1. Определить число ветвей дерева графа n_d и изобразить несколько возможных деревьев.

2. Для двух произвольных деревьев пронумеровать ветви графа, присваивая ветвям дерева первые номера, а хордам — последние; составить матрицу соединений.

3. Для каждого дерева наметить главные сечения, главные контуры и записать матрицы F , Q и B .

4. Используя топологические матрицы, записать независимые уравнения по законам Кирхгофа.

3.2. Выполнить условия задачи 3.1 для направленного графа, изображенного на рис. 3.2.

3.3м. Задана независимая матрица соединений (инциденций)

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \end{matrix}$$

1. Построить соответствующий направленный граф.

2. Выбрать два дерева, для каждого дать новую нумерацию ветвей, начиная с ветвей дерева.

3. Наметить главные контуры и главные сечения, записать матрицы F , B , Q .

4. Составить уравнения по законам Кирхгофа для главных контуров и сечений и сравнить их коэффициенты с элементами полученных матриц.

3.4. Выполнить условия задачи 3.3, если независимая матрица соединений некоторого направленного графа имеет вид

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{matrix}$$

3.5. Направленный граф цепи задан тройками чисел: 1,1,2; 2,1,5; 3,5,4; 4,3,4; 5,2,5; 6,2,3; 7,3,5; 8,1,4; 9,3,1.

1. Составить матрицы соединений — полную и независимую; в последнем случае выбрать в качестве отсчетного (базисного) пятый узел.

2. Выбрать произвольное дерево графа, произвести новую нумерацию ветвей, присваивая первые номера ветвям дерева, и составить матрицу F (топологическую матрицу).

3. Используя матрицу F , записать независимые уравнения по законам Кирхгофа.

3.6. Выполнить условия задачи 3.5 для направленного графа, заданного следующими тройками чисел: 1,5,1; 2,1,2; 3,2,3; 4,3,4; 5,1,3; 6,3,5; 7,2,4; 8,4,5; 9,1,4.

3.7м. Для некоторого направленного графа выбрано дерево и составлена матрица F' :

$$F' = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Изобразить граф цепи, наметить главные контуры и сечения и составить уравнения по законам Кирхгофа.

По матрице F' составить матрицы B и Q ; записать законы Кирхгофа в матричной форме.

3.8м. Для некоторой цепи выбрано дерево графа с упорядоченной нумерацией ветвей и составлены независимые уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 + u_4 &= 0; \\ u_1 - u_2 - u_3 + u_5 &= 0; \\ u_2 + u_3 + u_6 &= 0. \end{aligned}$$

Составить независимые уравнения по первому закону Кирхгофа.

3.9. Независимые уравнения по первому закону Кирхгофа для главных сечений направленного графа некоторой цепи с упорядоченной нумерацией ветвей имеют вид:

$$\begin{aligned} i_1 + i_5 - i_8 &= 0; \\ i_2 + i_5 - i_6 + i_7 - i_8 &= 0; \\ i_3 + i_5 - i_6 + i_7 - i_8 - i_9 &= 0; \\ i_4 + i_7 - i_8 - i_9 &= 0. \end{aligned}$$

Составить независимые уравнения по второму закону Кирхгофа.

3.10р. Структура цепи задана тройками чисел: 1,3,1; 2,3,2; 3,1,2; 4,3,1; 5,2,3. В ветвях: 1 — последовательно $u_{01}=24$ В и $R_1=2$ Ом; 2 — последовательно $u_{02}=16$ В и $R_2=1$ Ом; 3 — $R_3=1$ Ом; 4 — параллельно $i_{04}=4$ А и $R_4=2$ Ом; 5 — $R_5=2$ Ом. Определить токи всех ветвей методами контурных токов и узловых напряжений.

3.11р. В условиях задачи 3.10 определить ток i_{12} , используя теоремы об эквивалентных источниках.

3.12м. Из двух общих методов анализа (контурных токов и узловых напряжений) выбрать метод, который позволяет выполнить анализ цепи (рис. 3.12) с меньшим числом уравнений; определить этим методом токи ветвей при $u_{01}=4$ В, $i_{02}=2$ А, $R=1$ Ом.

3.13м. В цепи (рис. 3.13) резистивные элементы имеют $R=2$ Ом, $u_{01}=8$ В, $u_{02}=4$ В. Определить токи всех ветвей методами контурных токов и узловых напряжений.

3.14. По условию задачи 3.13 определить ток i_{12} , используя теоремы об эквивалентных источниках.

3.15м. В произвольной цепи, содержащей резистивные элементы и источники, выведены зажимы a и b . Напряжение на зажимах $u_{абх} = 4$ В, а при коротком замыкании зажимов $i_{абк} = 2$ А. Опреде-

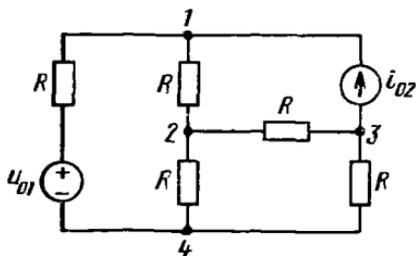


Рис. 3.12

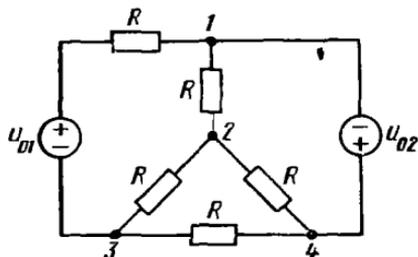


Рис. 3.13

лить ток резистивного элемента $R_{аб} = 6$ Ом, если его включить к зажимам a и b .

3.16. На схеме резистивной цепи (рис. 3.16) значения сопротивлений элементов указаны в омах, напряжения и токи источников — в вольтах и амперах.

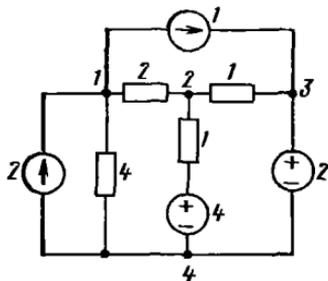


Рис. 3.16

1. Составить и решить уравнения контурных токов.

2. Определить токи и напряжения всех ветвей цепи.

3. Найти значения входных и передаточных проводимостей короткого замыкания.

3.17. Для резистивной цепи (рис. 3.16):

1. Составить и решить уравнения узловых напряжений, приняв в качестве базисного нижний узел 4.

2. Найти значения напряжений и токов всех ветвей.

3. Определить входные и передаточные сопротивления холостого хода.

3.18. Найти ток ветви, включенной между узлами 1 и 2 цепи (рис. 3.16), методом наложения, рассматривая отдельно действие обоих источников тока и напряжения.

3.19. Определить ток ветви, включенной между узлами 1 и 2 цепи (рис. 3.16), при помощи теорем об эквивалентных источниках.

3.20. Структура цепи задана тройками чисел: 1,1,2; 2,4,2; 3,2,3; 4,1,4; 5,3,4; 6,1,3; содержание ветвей: 1 — $R_1 = 0,5$ Ом; 2 — параллельно источник тока $i_{02} = 2$ А и $R_2 = 0,5$ Ом; 3 — $R_3 = 0,5$ Ом; 4 — $R_4 = 0,5$ Ом; 5 — $R_5 = 0,5$ Ом; 6 — последовательно $u_{06} = 4$ В и $R_6 = 0,5$ Ом.

Составить уравнения узловых напряжений (приняв за базисный узел 4) двумя методами: а) непосредственно по схеме; б) по мат-

ричным выражениям, используя независимую матрицу соединений. Решить составленную систему уравнений.

3.21. Схема цепи дана на рис. 3.21; на схеме числами указаны сопротивления резистивных элементов в омах, напряжения источников напряжения в вольтах и токи источников тока в амперах. Составить уравнения контурных токов и определить токи всех ветвей; найти цепь, дуальную заданной, и методом узловых напряжений определить напряжения всех ее ветвей.

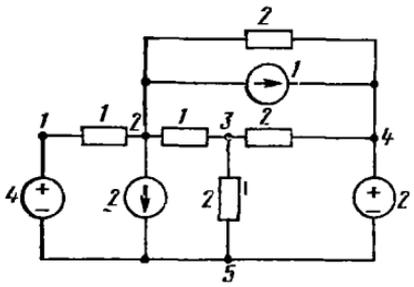


Рис. 3.21

3.22. По условиям задачи 3.21 определить ток в ветви, включенной между узлами 3 и 5, используя метод наложения.

3.23. Определить ток в ветви, включенной между узлами 3 и 5 цепи (рис. 3.21), по методу эквивалентного источника: 1) тока; 2) напряжения.

3.24р. В цепи (рис. 3.24), находящейся под действием источников постоянных напряжений и токов, напряжение между узлами $U_{a\delta} = 7$ В; сопротивления ветвей в омах составляют: $R_1 = R_2 = R_3 =$

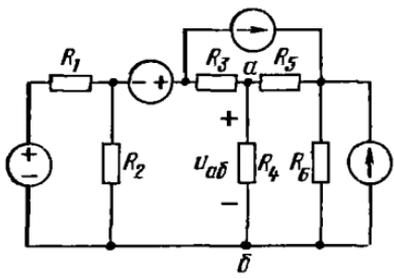


Рис. 3.24

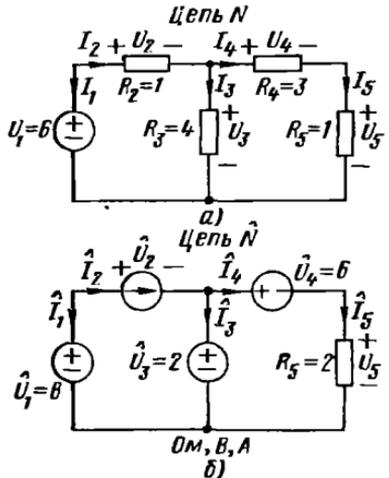


Рис. 3.25

$= R_4 = 2, R_5 = R_6 = 1$. Определить ток I_{R4} при условии, что дополнительный резистивный элемент $R = 1$ Ом будет включен: 1) параллельно R_4 ; 2) последовательно R_4 .

3.25р. Определить напряжения и токи всех элементов цепей N и \hat{N} постоянного тока (рис. 3.25, а, б), имеющих одинаковые направленные графы. Показать, что в соответствии с теоремой Теллгена для каждой из цепей

$$\sum_{k=1}^n U_k I_k = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n \hat{U}_k \hat{I}_k = 0 \quad (3.1)$$

и для двух цепей

$$\sum_{k=1}^n U_k \hat{I}_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n \hat{U}_k I_k = 0. \quad (3.2)$$

Положительные направления напряжений и токов в каждом из n элементов цепей N и \hat{N} принимаются согласованными.

Решить задачу, считая, что в цепи N (рис. 3.25, а) ветвь с резистивным элементом R_3 будет разомкнута (замкнута накоротко).

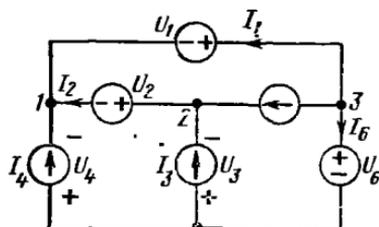


Рис. 3.26

3.26. Дана электрическая цепь (рис. 3.26): $U_1=10$ В; $U_2=6$ В; $I_3=3$ А; $I_4=4$ А; $I_5=2$ А; $U_6=4$ В.

Определить токи источников напряжения и напряжения источников тока (положительные направления напряжений и токов в каждом

из элементов приняты согласованными). Показать, что $\sum_{k=1}^n U_k I_k = 0$.

Какие элементы отдают и какие потребляют энергию?

3.27. По теореме Теллегена в электрической цепи справедливо уравнение

$$\sum_{k=1}^n u_k i_k = 0,$$

где u_k и i_k — напряжения и токи элементов, в общем случае изменяющиеся во времени. Будет ли нарушено приведенное условие, если величины $u_k(t)$ будут отсчитаны в некоторый момент времени t_1 , а токов $i_k(t)$ — в момент $t_2 \neq t_1$? Будет ли выполняться условие, если величины u_k соответствуют режиму возбуждения некоторой цепи источниками изменяющихся напряжений и токов, а токи — режиму постоянного тока той же цепи?

3.28. Используя теорему Теллегена доказать, что $\sum_{k=1}^n u_k i_k' = 0$

и $\sum_{k=1}^n u_k' i_k = 0$, где u_k и i_k — напряжение и ток ветви k , а u_k' и i_k' — производные напряжения и тока.

3.29р. Определить токи и напряжения ветвей цепи (см. рис. 3.16), используя метод токов хорд. Систему уравнений составить двумя способами: 1) на основании законов Кирхгофа, непосредственно по графу цепи; 2) с помощью матричных выражений путем предварительного составления топологических матриц.

3.30р. Определить токи и напряжения ветвей цепи (см. рис. 3.16), используя метод напряжения ветвей дерева. Систему уравнений составить двумя способами: 1) на основании законов Кирхгофа непосредственно по графу цепи; 2) с помощью матричных выражений, используя топологические матрицы.

3.31. На рис. 3.31 показана схема некоторой цепи; значения сопротивлений резистивных элементов даны в омах, напряжений и

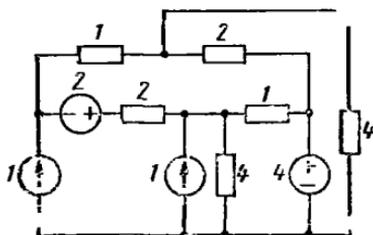


Рис. 3.31

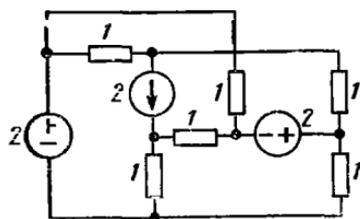


Рис. 3.32

токов источников — в вольтах и амперах. Используя методы токов хорд и напряжений ветвей дерева, определить токи и напряжения всех ветвей цепи.

3.32. Выполнить условия задачи 3.31 для цепи, схема которой дана на рис. 3.32.

3.33. В условиях задачи 3.10 принять $u_{02}=0$, $i_{04}=0$. Используя метод сигнальных графов и формулу Мэзона, определить u_{R2}/u_{01} .

3.34. Дана цепь (рис. 3.34): $R_0=R_1=R_2=R_4=R_5=1$ Ом, $R_3=0,5$ Ом. Используя метод сигнальных графов и формулу Мэзона, определить i_3/i_0 .

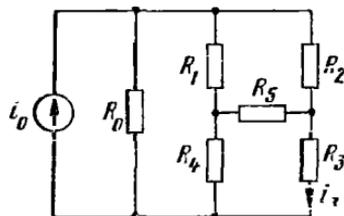


Рис. 3.34

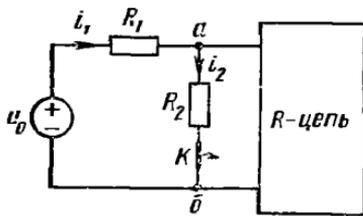


Рис. 3.35

3.35. В цепи (рис. 3.35) $i_1=2,5$ А, $i_2=3$ А, $R_1=4$ Ом, $R_2=3$ Ом. При разомкнутом ключе $u_{абк}=u_{зх}=12$ В. Определить ток i_2 при изменении полярности источника u_0 .

3.36. Определить ток i_2 в условиях задачи 3.35 при замене источника напряжения u_0 источником тока $i_0=4$ А.

3.37м. Доказать, что все ячейки (контуры, не охватывающие внутренних ветвей) любой планарной цепи независимы и число ячеек $n_{\text{я}} = n_{\text{в}} - (n_{\text{у}} + 1)$, где $n_{\text{в}}$ — число ветвей; $n_{\text{у}}$ — число узлов цепи.

3.38. Сколько нужно измерить токов и в каких ветвях, чтобы найти токи всех остальных ветвей произвольной цепи?

3.39. Сколько нужно измерить напряжений и в каких ветвях, чтобы определить напряжения всех остальных ветвей произвольной цепи?

РЕШЕНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

3.1. Число ветвей дерева $n_{\text{д}} = n_{\text{у}} - 1 = 4$; некоторые из возможных деревьев представлены на рис. 3.1б. Выбираем дерево (рис. 3.1в) и нумеруем ветви: 1 ÷ 4 — ветви дерева; 5 ÷ 7 — хорды (пунктир). Составляем топологические матрицы.

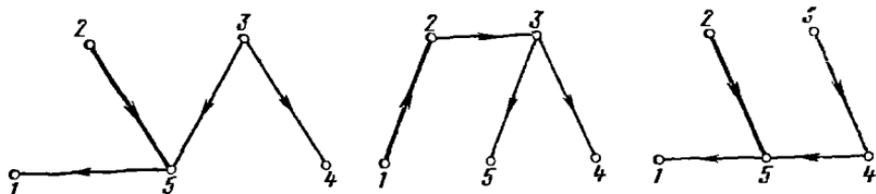


Рис. 3.1б

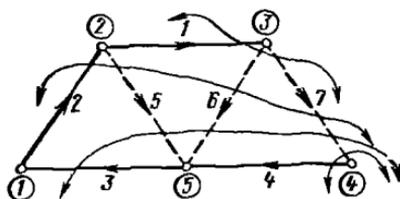


Рис. 3.1в

Матрица соединений (полная)

$$A_a = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Матрица главных сечений

Главные сечения показаны на рис. 3.1в; их направления, указанные стрелками, выбраны так, чтобы соответствующая ветвь де-

реца учитывалась бы со знаком «+» (выходила из области, отмеченной сечением).

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|ccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & -1 \end{array} \end{array} = [1 \mid F].$$

Матрица главных контуров

Главные контуры показаны на рис. 3.1г; их направления, указанные стрелками, выбраны так, чтобы соответствующая хорда

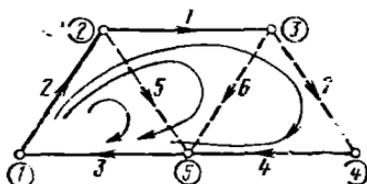


Рис. 3.1г

учитывалась бы со знаком «+» (направления контура и хорды должны совпадать).

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|ccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{array} \end{array} = [F' \mid 1].$$

$$F = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 5 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{array} \end{array}, \quad F' = -Ft = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \end{array}.$$

Уравнения равновесия токов

В матричной форме $Qi=0$;
в развернутой

$$\begin{aligned} i_1 - i_6 - i_7 &= 0; \\ i_2 - i_5 - i_6 - i_7 &= 0; \\ i_3 - i_5 - i_6 - i_7 - i_8 &= 0; \\ i_4 - i_7 &= 0. \end{aligned}$$

В матричной форме $\mathbf{V}u=0$;
в развернутой

$$\begin{aligned} u_2 + u_3 + u_5 &= 0; \\ u_1 + u_2 + u_3 + u_6 &= 0; \\ u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_7 &= 0. \end{aligned}$$

3.3. В условиях задана независимая матрица соединений \mathbf{A} ; от нее следует перейти к полной матрице соединений \mathbf{A}_a , добавив пятую строку, исходя из того, что сумма элементов любого столбца матрицы \mathbf{A}_a равна нулю.

3.7. Нумерация строк и столбцов заданной матрицы \mathbf{F}' показывает, что ветви дерева имеют номера с 1-го по 4-й. Остальные номера принадлежат хордам. Так как $n_d=4$, то число узлов графа $n_y=n_d+1=5$.

Для построения графа следует наметить 5 узлов и далее в соответствии с матрицей \mathbf{F}' образовывать главные контуры.

3.8. По заданным уравнениям установить номера хорд и ветвей дерева и составить матрицу \mathbf{F}' . Используя соотношение $\mathbf{F} = -\mathbf{F}'^t$, записать матрицу сечений $\mathbf{Q} = [\mathbf{1} \mid \mathbf{F}]$ и далее — независимые уравнения по первому закону Кирхгофа.

3.10. Изображаем схему цепи (рис. 3.10, а); направления токов ветвей указаны стрелками.

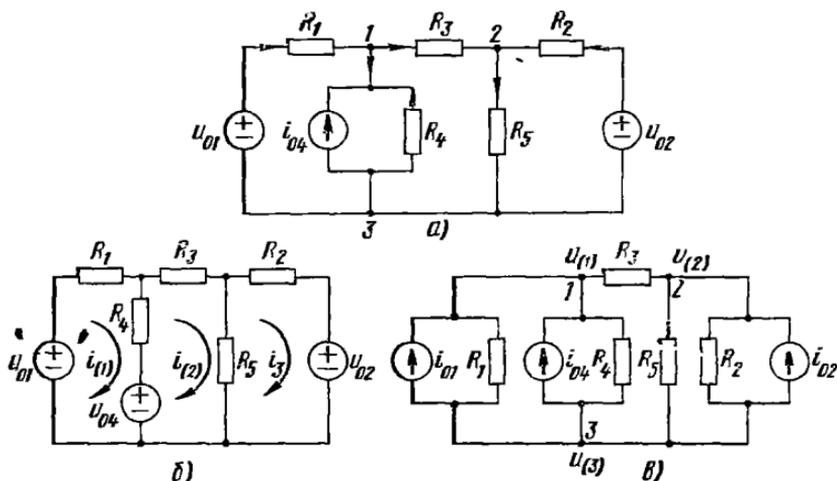


Рис. 3.10

Метод контурных токов

Преобразуем источник тока с резистивным элементом R_4 в эквивалентную схему с источником напряжения $u_{04} = R_4 i_{04} = 8$ В, выберем направление всех контурных токов (токов ячеек) по направ-

лению часовой стрелки (рис. 3.10, б) и составим уравнения контурных токов:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{(1)} \\ i_{(2)} \\ i_{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{(1)} \\ u_{(2)} \\ u_{(3)} \end{bmatrix};$$

$$R_{11} = R_1 + R_4 = 4 \text{ Ом}, \quad R_{22} = R_3 + R_5 + R_4 = 5 \text{ Ом};$$

$$R_{33} = R_2 + R_5 = 3 \text{ Ом}, \quad R_{12} = R_{21} = -R_4 = -2 \text{ Ом};$$

$$R_{13} = R_{31} = 0, \quad R_{23} = R_{32} = -R_5 = -2 \text{ Ом};$$

$$u_{(1)} = u_{01} - u_{04} = 16 \text{ В}, \quad u_{(2)} = u_{04} = 8 \text{ В}, \quad u_{(3)} = -u_{02} = -16 \text{ В}$$

Определитель системы

$$D = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 32.$$

В определителе D , заменяя один из столбцов на правую часть системы уравнений, находим определители $D_1 = 160$, $D_2 = 64$, $D_3 = -128$ и контурные токи:

$$i_{(1)} = D_1/D = 5 \text{ А}, \quad i_{(2)} = D_2/D = 2 \text{ А}, \quad i_{(3)} = D_3/D = -4 \text{ А}.$$

Токи ветвей исходной (до преобразования источника) цепи:

$$i_1 = i_{(1)} = 5 \text{ А}, \quad i_2 = -i_{(3)} = 4 \text{ А}, \quad i_3 = i_{(2)} = 2 \text{ А},$$

$$i_4 = -i_{(1)} + i_{(2)} - i_{04} = -7 \text{ А}, \quad i_5 = i_{(2)} - i_{(3)} = 6 \text{ А}$$

(для определения тока i_4 использован первый закон Кирхгофа для узла, к которому подключен источник тока i_{04}).

Метод узловых напряжений

Преобразуем источники напряжения с резистивными элементами R_1 и R_2 в эквивалентные схемы с источниками тока $i_{01} = u_{01}/R_1 = 12 \text{ А}$, $i_{02} = u_{02}/R_2 = 16 \text{ А}$ и элементами R_1 и R_2 . За базисный узел принимается узел 3 ($u_{(3)} = 0$ на рис. 3.10, в). Уравнение узловых напряжений в матричной форме записи:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{(1)} \\ u_{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{(1)} \\ i_{(2)} \end{bmatrix};$$

$$G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = 2 \text{ См}, \quad G_{22} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} = 2,5 \text{ См},$$

$$G_{12} = G_{21} = -1/R_3 = -1 \text{ См}, \quad i_{(1)} = i_{01} + i_{04} = 16 \text{ А}, \quad i_{(2)} = i_{02} = 16 \text{ А}.$$

Определитель системы

$$D = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2,5 \end{vmatrix} = 4;$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} i_{(1)} & G_{12} \\ i_{(2)} & G_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 & -1 \\ 16 & 2,5 \end{vmatrix} = 56;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} G_{11} & i_{(1)} \\ G_{21} & i_{(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 16 \\ -1 & 16 \end{vmatrix} = 48.$$

Напряжения узлов

$$u_{(1)} = D_1/D = 14 \text{ В}, \quad u_{(2)} = D_2/D = 12 \text{ В}.$$

Токи исходной цепи

$$i_1 = \frac{u_{(3)} - u_{(1)} + u_{01}}{R_1} = 5 \text{ А};$$

$$i_2 = \frac{u_{(3)} - u_{(2)} + u_{02}}{R_2} = 4 \text{ А};$$

$$i_3 = \frac{u_{(1)} - u_{(2)}}{R_3} = 2 \text{ А}; \quad i_4 = \frac{u_{(3)} - u_{(1)}}{R_4} = -7 \text{ А};$$

$$i_5 = \frac{u_{(2)} - u_{(3)}}{R_5} = 5 \text{ А}.$$

3.11. Как следует из условий задачи, ток $i_{12} = i_3$ (рис. 3.10, а). Для эквивалентной схемы с источником напряжения (теорема Тевенена)

$$i_3 = u_{3x}/(R_0 + R_3).$$

Для определения u_{3x} размыкаем ветвь с R_3 (рис. 3.11, а). По второму закону Кирхгофа для контура, обозначенного стрелкой, имеем

$$u_{3x} + R_5 i'_5 - R_4 i'_4 = 0.$$

Определяем токи:

$$i'_5 = \frac{u_{02}}{R_2 + R_5} = \frac{16}{3} \text{ А}, \quad i'_4 = \frac{u_{01}}{R_1 + R_4} + i_{04} \frac{R_1}{R_1 + R_4} = 8 \text{ А}.$$

Тогда $u_{3x} = R_4 i'_4 - R_5 i'_5 = 16/3 \text{ В}$.

Для определения R_0 исключаем из схемы источники (рис. 3.11, б):

$$R_0 = \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} + \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_5} = \frac{5}{3} \text{ Ом}.$$

Находим реакцию ветви

$$i_3 = \frac{u_{3x}}{R_0 + R_3} = \frac{16/3}{5/3 + 1} = 2 \text{ А.}$$

Для эквивалентной схемы с источником тока (теорема Нортон)

$$u_3 = i_{3к} / (G_0 + G_3).$$

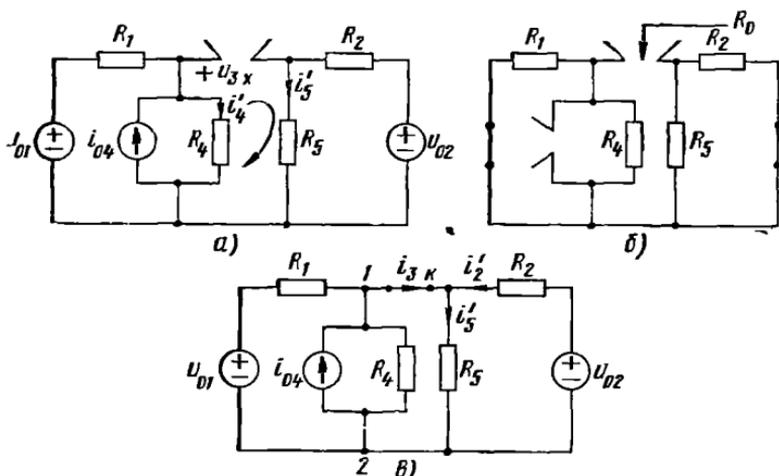


Рис. 3.11

Для определения $i_{3к}$ замыкаем ветвь накоротко (рис. 3.11, в). Используем метод узловых напряжений, принимая узел 2 за базисный,

$$G_{11}u_{(1)} = i_{(1)},$$

где $G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_2} = 2,5 \text{ См};$ $i_{(1)} = u_{01}/R_1 + i_{04} +$
 $+ u_{02}/R_2 = 32 \text{ А};$ $u_{(1)} = i_{(1)}/G_{11} = 12,8 \text{ В.}$

$$i_{3к} = i'_5 - i'_2,$$

токи определяют выражениями:

$$i'_5 = \frac{u_{(1)}}{R_5} = 6,4 \text{ А}, \quad i'_2 = \frac{u_{02} - u_{(1)}}{R_2} = 3,2 \text{ А.}$$

Тогда $i_{3к} = 3,2 \text{ А},$ $G_0 = 1/R_0,$ где $R_0 = 5/3 \text{ Ом}$ — из предыдущего расчета.

Окончательно получаем

$$u_3 = i_{3к} (G_0 + G_3) = 3,2 (0,6 + 1) = 2 \text{ В.}$$

3.12. Обратите внимание на то, что в методе контурных токов ток ячейки, содержащей источник тока, является известным и равным i_{02} (без учета знака, который определяется направлением кон-

турного тока). Следовательно, для определения двух других контурных токов потребуется только два независимых уравнения. По методу узловых напряжений необходимо составить систему из трех уравнений ($n_y - 1 = 3$).

3.13. При использовании метода узловых напряжений за базисный следует принять узел 1 или узел 4, тогда напряжение другого узла будет равно u_{02} (без учета знака, определяемого выбором базисного узла). При таком выборе базисного узла не потребуется преобразовывать идеальный источник напряжения.

3.15. Исходя из общих выражений теорем об эквивалентных источниках напряжения и тока, установить, чему равно отношение $u_{абх}/i_{абк}$.

3.24. Заданное напряжение $U_{аб} = 7$ В можно рассматривать как напряжение источника, имеющего внутреннее сопротивление

$$R_0 = \frac{1}{\frac{1}{R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5 + R_6}} = \frac{1}{1/3 + 1/2 + 1/2} = 0,75 \text{ Ом.}$$

Ток в резистивном элементе R при его подключении к узлам ab будет равен по теореме об эквивалентном источнике (теорема Тевенена)

$$I_R = U_{аб} / (R_0 + R) = 7 / (0,75 + 1) = 4 \text{ А.}$$

Новое значение напряжения $U'_{аб} = R I_R = 1 \cdot 4 = 4$ В и тока $I_{R4} = U'_{аб} / R_4 = 2$ А.

Ток при включении R последовательно с R_4 находим методом компенсации. В ветвь с новым значением сопротивления $R_4 + R = 3$ Ом включаем компенсирующий источник напряжения $\Delta U_a = R_4 I_{R4} = 2$ В и определяем величину изменения тока, вызванного включением в ветвь элемента R ; при этом источники цепи предполагаем отсутствующими. Изменение тока в ветви

$$\Delta I_{R4} = \frac{\Delta U_a}{R_4 + R + \frac{R' R''}{R' + R''}} = \frac{2}{2 + 1 + 6/5} = 0,475 \text{ А,}$$

$$R' = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 3 \text{ Ом, } R'' = R_5 + R_6 = 2 \text{ Ом.}$$

Новое значение тока $I'_{R4} = I_{R4} - \Delta I_{R4} = 1,525$ А.

3.25. На рис. 3.25, а, б указаны положительные направления напряжений и токов, согласованные в каждом элементе. Для цепи (рис. 3.25, а):

$$R_{вх} = R_2 + \frac{R_3 (R_4 + R_5)}{R_3 + R_4 + R_5} = 3 \text{ Ом,}$$

$$I_1 = -I_2 = -\frac{U_1}{R_{BX}} = -2 \text{ A}, \quad U_1 = 6\text{B},$$

$$I_2 = 2\text{A}, \quad U_2 = R_2 I_2 = 2 \text{ B}, \quad U_3 = U_1 - U_2 = 4\text{B}, \quad I_3 = U_3 R_3 = 1 \text{ A},$$

$$I_4 = I_2 - I_3 = 1 \text{ A}, \quad U_4 = R_4 I_4 = 3 \text{ B}, \quad I_5 = I_4 = 1 \text{ A}, \quad U_5 = R_5 I_5 = 1 \text{ B},$$

$$U_1 I_1 + U_2 I_2 + U_3 I_3 + U_4 I_4 + U_5 I_5 = 6(-2) + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0.$$

Для цепи (рис. 3.25, б):

$$\hat{U}_1 = 8 \text{ B}, \quad \hat{I}_1 = -\hat{I}_2 = -4 \text{ A}, \quad \hat{U}_2 = \hat{U}_1 - \hat{U}_3 = 6 \text{ B}, \quad \hat{I}_2 = 4 \text{ A},$$

$$\hat{U}_5 = -\hat{U}_4 + \hat{U}_3 = -4 \text{ B},$$

$$\hat{I}_5 = \hat{U}_5 R_5 = -2 \text{ A}, \quad \hat{U}_4 = 6 \text{ B}, \quad \hat{I}_4 = \hat{I}_5 = -2 \text{ A},$$

$$\hat{U}_3 = 2 \text{ B}, \quad \hat{I}_3 = \hat{I}_2 - \hat{I}_4 = 6 \text{ A},$$

$$\hat{U}_1 \hat{I}_1 + \hat{U}_2 \hat{I}_2 + \hat{U}_3 \hat{I}_3 + \hat{U}_4 \hat{I}_4 + \hat{U}_5 \hat{I}_5 = 8(-4) + 6 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 6(-2) +$$

$$+ (-4)(-2) = 0.$$

Проверка справедливости уравнений, приведенных в условии задачи,

$$U_1 \hat{I}_1 + U_2 \hat{I}_2 + U_3 \hat{I}_3 + U_4 \hat{I}_4 + U_5 \hat{I}_5 = 6(-4) + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 3(-2) +$$

$$+ 1(-2) = 0,$$

аналогично

$$\hat{U}_1 I_1 + \hat{U}_2 I_2 + \hat{U}_3 I_3 + \hat{U}_4 I_4 + \hat{U}_5 I_5 = 8(-2) + 6 \cdot 2 +$$

$$+ 2 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + (-4) \cdot 1 = 0.$$

3.29. Для формирования уравнений по методу токов хорд выбираем дерево графа цепи и производим нумерацию всех ветвей графа. Число ветвей дерева графа $n_d = n_y - 1 = 4$. К ветвям дерева относим: 1) ветви с источниками напряжения, их число $n_d^E = 2$, номера 1 и 2; 2) необходимое для образования дерева число резистивных ветвей, их число $n_d^R = 2$, номера 3 и 4.

К хордам (ветвям связи) относим: 1) оставшиеся резистивные ветви, их число $n_x^R = 2$, номера 5 и 6; 2) ветви с источниками тока, их число $n_x^I = 2$, номера 7 и 8.

Граф цепи показан на рис. 3.29 — сплошными линиями выделено выбранное дерево.

Составляем топологическую матрицу F , которая показывает, какие хорды графа принадлежат главным сечениям. По матрице F легко составить матрицы главных сечений $Q = [F \mid 1]$ и главных контуров $B = [F' \mid 1]$, где $F' = -F^t$ (см. решение задачи 3.1).

$$F = \begin{matrix} & \begin{matrix} n_x^R \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 \\ \vdots & \vdots \\ 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} n_x^E \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & & 1 \\ \hline 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} & = \left[\begin{array}{c|c} F_{ER} & F_{EI} \\ \hline F_{RR} & F_{RI} \end{array} \right] \end{matrix}$$

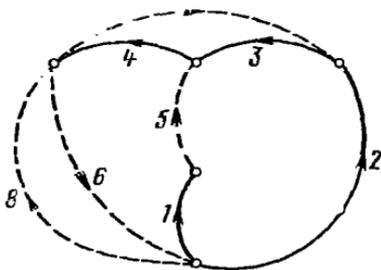


Рис. 3.29

В соответствии с делением ветвей графа на 4 группы разбиваем матрицу F на 4 подматрицы и даем им соответствующие обозначения (см. выражение F , записанное ранее).

Формируем уравнения по методу токов хорд дважды — по уравнениям законов Кирхгофа и в матричной форме (для того чтобы полнее вскрыть содержание матричных преобразований).

· Непосредственное преобразование уравнений по законам Кирхгофа

По матрице Q записываем уравнения равновесия токов для главных сечений, разрешенные относительно токов ветвей дерева: при этом учитываем, что $i_7 = i_{07}$, $i_8 = i_{08}$.

$$i_1 = i_5 \quad | \quad \dots \quad (3.3)$$

$$i_2 = -i_5 + i_6 \quad | \quad i_{09} \dots \quad (3.4)$$

$$i_3 = -i_5 + i_6 \quad | \quad + i_{07} - i_{08} \dots \quad (3.5)$$

$$i_4 = \quad i_6 \quad | \quad + i_{07} - i_{08} \dots \quad (3.6)$$

Нетрудно установить, что коэффициенты приведенных уравнений есть элементы матрицы F с обратным знаком.

По матрице B записываем уравнения равновесия напряжений для главных контуров, разрешенные относительно напряжений хорд:

$$u_5 = u_{01} - u_{02} \quad | \quad + u_3 \quad \dots \quad (3.7)$$

$$u_6 = \quad u_{02} \quad | \quad - u_3 - u_4 \quad \dots \quad (3.8)$$

$$u_7 = \quad \quad \quad | \quad - u_3 - u_4 \quad \dots \quad (3.9)$$

$$u_8 = \quad u_{02} \quad | \quad + u_3 + u_4 \quad \dots \quad (3.10)$$

Коэффициенты этих уравнений есть элементы матрицы F^t (следует учесть, что $u_1 = -u_{01}$, а $u_2 = -u_{02}$).

В методе токов хорд основными неизвестными являются токи резистивных хорд, т. е. токи i_5 и i_6 . Выражая в (3.7) и (3.8) напряжения резистивных ветвей через токи и сопротивления, получим:

$$R_5 i_5 = u_{01} - u_{02} + R_3 i_3, \quad (3.7a)$$

$$R_6 i_6 = u_{02} - R_3 i_3 - R_4 i_4. \quad (3.8a)$$

Подставляя вместо токов i_3 и i_4 резистивных ветвей дерева уравнения (3.7) и (3.8), после некоторых преобразований получаем систему уравнений токов хорд

$$(R_3 + R_5) i_5 - R_3 i_6 = u_{01} - u_{02} + R_3 (i_{07} - i_{08}), \quad (3.11)$$

$$-R_3 i_5 + (R_3 + R_4 + R_5) i_6 = u_{02} + (R_3 + R_4) (-i_{07} + i_{08}). \quad (3.12)$$

Определив из полученной системы токи резистивных хорд i_5 и i_6 , по уравнениям (3.3) — (3.6) можно найти токи всех остальных ветвей; напряжения источников тока можно вычислить по уравнениям (3.9) и (3.10).

Формирование уравнений матричными методами

Преобразования над независимыми уравнениями для главных сечений и контуров, выполненные ранее, могут быть осуществлены в матричной форме, что необходимо при решении задач анализа цепей с помощью ЭВМ.

Система уравнений по методу токов хорд в матричной форме имеет вид

$$C' i_x^R = D', \quad \text{здесь } C' = R_x + F_{RR}^t R_d F_{RR},$$

$$D' = F_{ER}^t u_d^E - F_{RR}^t R_d F_{Ri} i_x^t,$$

где R_x и R_d — диагональные матрицы сопротивлений резистивных хорд и резистивных ветвей дерева соответственно; u_d^E и i_x^t — векторы напряжений ветвей дерева с источниками напряжения и токов хорд источников тока соответственно (вывод выражений не приводится).

В рассматриваемой задаче

$$C' = \begin{bmatrix} R_5 & 0 \\ 0 & R_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_3 & 0 \\ 0 & R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_3 + R_5 & -R_3 \\ -R_3 & R_3 + R_5 + R_6 \end{bmatrix};$$

$$D' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -u_{01} \\ -u_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_3 & 0 \\ 0 & R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{07} \\ i_{08} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} u_{01} - u_{02} + R_3 (i_{07} - i_{08}) \\ u_{02} - (R_3 + R_4) i_{07} + (R_3 + R_4) i_{08} \end{bmatrix}.$$

Матричное уравнение $C' \begin{bmatrix} i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = D'$ после перемножения матриц в левой части есть два уравнения (3.11) и (3.12), полученные ранее.

При подстановке численных значений сопротивлений резистивных элементов, напряжений и токов источников имеем

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Решая эту систему, получаем: $i_5 = 0,6$ А, $i_6 = 0,9$ А. Токи ветвей дерева (источников напряжения) можно вычислить по уравнениям (3.3) и (3.4) или по матричному выражению

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_x^E &= -\mathbf{F}_{ER} \mathbf{i}_x^R - \mathbf{F}_{EI} \mathbf{i}_x^I; \\ \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6 \\ -1,7 \end{bmatrix}; \\ i_1 &= 0,6 \text{ А}, \quad i_2 = -1,7 \text{ А}. \end{aligned}$$

Токи резистивных ветвей дерева определяются уравнениями (3.5) и (3.6) или в матричной форме

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_x^R &= -\mathbf{F}_{RR} \mathbf{i}_x^R - \mathbf{F}_{RI} \mathbf{i}_x^I; \\ \begin{bmatrix} i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,7 \\ -0,1 \end{bmatrix}; \\ i_3 &= -0,7 \text{ А}, \quad i_4 = -0,1 \text{ А}. \end{aligned}$$

3.30. Для формирования уравнений по методу напряжений ветвей дерева воспользуемся деревом графа, выбранным в решении предыдущей задачи (рис. 3.29); при этом сохраняется нумерация ветвей и выражение топологической матрицы \mathbf{F} и ее подматриц.

Формируем уравнения дважды: непосредственно по уравнениям Кирхгофа и матричными методами (для более полного раскрытия сути матричных преобразований).

Непосредственное преобразование уравнений по законам Кирхгофа

В методе напряжений ветвей дерева основными переменными являются напряжения резистивных ветвей дерева, т. е. u_3 и u_4 . В уравнениях (3.5) и (3.6) (здесь и далее ссылки на решение задачи 3.29) выражаем токи резистивных ветвей через напряжения и проводимости:

$$G_3 u_3 = -G_5 u_5 + G_6 u_6 + i_{07} - i_{08}, \quad (3.5a)$$

$$G_4 u_4 = G_6 u_6 + i_{07} - i_{08}. \quad (3.6a)$$

Подставляя вместо напряжений резистивных хорд u_5 и u_6 уравнения (3.7) и (3.8), после преобразований получаем систему уравнений напряжений ветвей дерева:

$$(G_3 + G_5 + G_6)u_3 + G_6u_4 = i_{07} - i_{08} - G_5u_{01} + (G_5 + G_6)u_{02}, \quad (13)$$

$$G_6u_3 + (G_4 + G_6)u_4 = i_{07} - i_{08} + G_6u_{02}. \quad (14)$$

Определив из системы напряжения резистивных ветвей дерева u_3 и u_4 , по уравнениям (3.7)–(3.10) можно найти напряжения остальных ветвей; токи источников напряжения вычисляем по уравнениям (3.3) и (3.4).

Формирование уравнений матричными методами

Система уравнений по методу напряжений ветвей дерева в матричной форме имеет вид $Cu_n^R = D$, где $C = G_n + F_{RR}G_xF'_{RR}$, $D = -F_{RR}i'_x - F_{RR}G_xF'_{ER}u_n^E$.

Смысл каждой матрицы был вскрыт при решении задачи 3.29.

В рассматриваемом примере

$$C = \begin{bmatrix} G_3 & 0 \\ 0 & G_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_5 & 0 \\ 0 & G_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_3 + G_5 + G_6 & G_6 \\ G_6 & G_4 + G_6 \end{bmatrix};$$

$$D = - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{07} \\ i_{08} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -u_{01} \\ -u_{02} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} i_{07} - i_{08} - G_5u_{01} + (G_5 + G_6)u_{02} \\ i_{07} - i_{08} + G_6u_{02} \end{bmatrix}.$$

Матричное уравнение $C \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = D$ в развернутой форме есть система уравнений (3.13) и (3.14), полученная ранее. Подставляя численные значения всех величин, имеем

$$\begin{bmatrix} 1,75 & 0,25 \\ 0,25 & 0,75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,5 \\ -0,5 \end{bmatrix}.$$

Решая эту систему, получаем $u_3 = -1,4$ В, $u_4 = -0,2$ В.

Напряжения резистивных хорд могут быть вычислены по уравнениям (3.7) и (3.8) или матричному выражению $u_x^R = F'_{ER}u_n^E + F'_{RR}u_n^R$;

$$\begin{bmatrix} u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1,4 \\ -0,2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1,4 \\ -0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 3,6 \end{bmatrix},$$

откуда $u_5 = 0,6$ В, $u_6 = 3,6$ В.

Напряжения источников тока определяют по уравнениям (3.9) и (3.10) или в матричной форме

$$u_x^I = F_{EI}^T u_n^E + F_{RI}^T u_n^R;$$

$$\begin{bmatrix} u_7 \\ u_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1,4 \\ -0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,6 \\ -3,6 \end{bmatrix},$$

откуда $u_7 = 1,6$ В, $u_8 = -3,6$ В.

3.37. Использовать для доказательства метод математической индукции.

ГЛАВА 4

АНАЛИЗ RLC-ЦЕПЕЙ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ ПРИ ПОСТОЯННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

4.1м. Цепь с параметрами $R=10$ Ом, $L=0,5$ Гн включена на постоянное напряжение U (рис. 4.1). Значение энергии магнитного поля $W_L(0-) = 4$ Дж. В момент времени $t=0$ размыкается ключ. Определить: 1) величину R_0 , при которой напряжение на ветви 1—2 не превысит 200 В; 2) выражение тока L -элемента и время, в течение которого ток уменьшится до 25% первоначального значения. Показать, что за время переходного процесса вся энергия L -элемента преобразуется в тепловую.

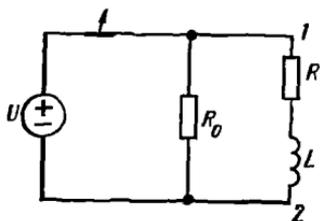


Рис. 4.1

4.2м. Последовательный контур $R=1$ Ом и $L=2,885$ Гн в момент времени t_0 , по уравнениям (3.3)—(3.6) можно найти токи всех остальных U . Ток установившегося режима $I=5$ А. Определить значение тока через $t_1=0,5$ с после включения.

Указать, каким образом можно обеспечить к моменту $t_1=0,5$ с значение тока $i(t_1)=2,5$ А (ток установившегося режима считать $I=5$ А).

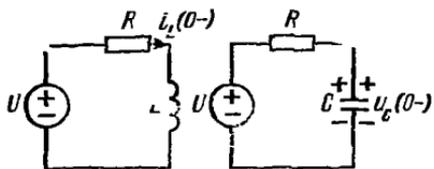


Рис. 4.3

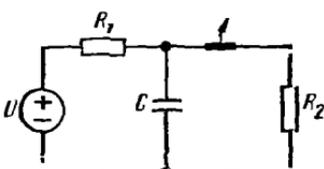


Рис. 4.4

4.3. Для цепей (рис. 4.3) записать в общем виде уравнения состояния и их решения. Решить задачу для дуальных цепей.

4.4. Цепь (рис. 4.4) находится под действием источника постоянного напряжения $U=2$ В, $R_1=2$ Ом, $R_2=3$ Ом, $C=0,25$ Ф.

В момент времени $t=0$ размыкается ключ. Построить (качественно) графики $i(t)$ и $u_C(t)$. Получить аналитические выражения $i(t)$ и $u_C(t)$.

4.5. Емкостной элемент C включается через резистивный элемент R к источнику постоянного напряжения U (рис. 4.5). Построить (качественно) графики $i(t)$ и $u_C(t)$ при следующих начальных условиях: $u_C(0-) = 0$; $u_C(0-) > U$; $u_C(0-) < U$; $u_C(0-) = U$; $u_C(0-) = -3U$.

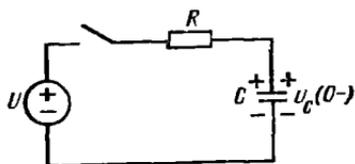


Рис. 4.5

4.6р. Структура цепи задана тройками чисел 1, 3, 1; 2, 1, 3; 3, 1, 2; 4, 2, 3. Содержание ветвей: 1 — последовательно источник напряжения $U=12$ В и $R=2$ Ом; 2 — последовательно $R_1=4$ Ом и $L=2$ Гн; 3 — замкнутый ключ; 4 — параллельно $R_2=4$ Ом и $C=0,125$ Ф. Ключ в момент времени $t=0$ размыкается. Построить (качественно) графики $i_L(t)$ и $u_C(t)$ и получить их аналитические выражения.

4.7. Цепь (рис. 4.7) находится под действием источника постоянного тока $I=6$ А; $R=4$ Ом, $R_1=R_2=2$ Ом, $L=1$ Гн, $C=0,75$ Ф. В момент времени $t=0$ ключ замыкается. Построить (качественно) графики $u_C(t)$ и $i_L(t)$ и получить их аналитические выражения.

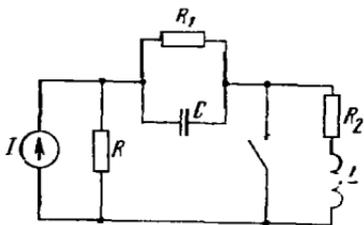


Рис. 4.7

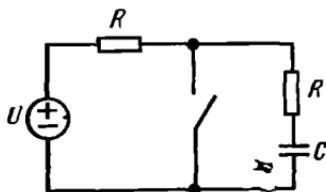


Рис. 4.9

4.8м. В цепи (см. рис. 4.1) $U=10$ В, $R_0=R=5$ Ом, $L=0,5$ Гн ключ считать разомкнутым. В некоторый момент времени ключ замыкается и через $t_1=1$ с размыкается вновь. Построить (качественно) графики токов ветвей при переходном процессе. Решить задачу при условии замены L -элемента на элемент $C=0,001$ Ф.

4.9м. В цепи (рис. 4.9) действует источник постоянного напряжения $U=8$ В, $R=2$ Ом, $C=0,01$ Ф. В некоторый момент времени ключ размыкается и через $t_1=1$ с замыкается вновь. Построить (качественно) графики токов ветвей цепи при переходном процессе. Решить задачу при условии замены C -элемента L -элементом ($L=0,1$ Гн).

4.10р. Структура цепи определяется тройками чисел: 1, 4, 1; 2, 1, 2; 3, 1, 3; 4, 2, 3; 5, 2, 4; 6, 3, 4. Содержание ветвей: 1 — источник напряжения $U=3$ В; 2, 3 и 5 — $R=1$ Ом; 4 — разомкнутый

ключ; $b - C = 1 \text{ Ф}$. В момент времени $t = 0$ ключ замыкается; определить $u_C(t)$ и токи всех ветвей цепи.

4.11. В схеме рис. 4.11 $I = 3 \text{ А}$, $R = 1 \text{ Ом}$, $L = 1 \text{ Гн}$. В момент времени $t = 0$ ключ размыкается; определить токи всех ветвей цепи.

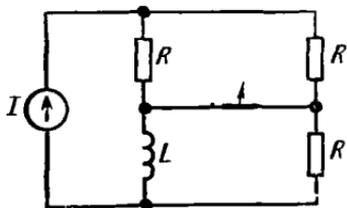


Рис. 4.11

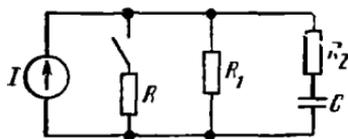


Рис. 4.12

4.12. Дана цепь (рис. 4.12): $I = 6 \text{ А}$, $R = R_1 = 2 \text{ Ом}$, $R_2 = 4 \text{ Ом}$, $C = 0,1 \text{ Ф}$. Определить входное напряжение цепи после замыкания ключа

4.13м. В цепи (рис. 4.13) $I = 4 \text{ А}$, $R_2 = 1 \text{ Ом}$, $R_3 = 3 \text{ Ом}$, $C = 1/6 \text{ Ф}$; в момент времени $t = 0$ ключ замыкается. Определить R_1 и входное напряжение цепи, если $u_{R1}(0+) = 8 \text{ В}$.

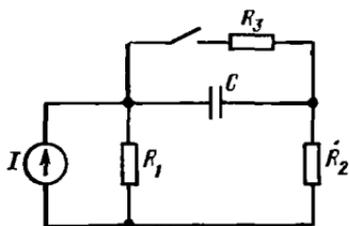


Рис. 4.13

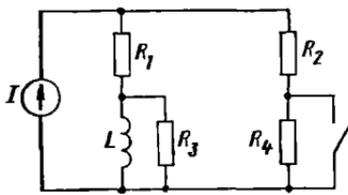


Рис. 4.14

4.14. Дана цепь (рис. 4.14): $I = 12 \text{ А}$, $R_1 = R_2 = 2 \text{ Ом}$, $R_3 = R_4 = 4 \text{ Ом}$, $L = 1 \text{ Гн}$. Определить $i_L(t)$ и начальные значения напряжений всех ветвей, если ключ в момент времени $t = 0$ замыкается.

4.15р. Структура цепи задана числами 1, 3, 1; 2, 1, 3; 3, 1, 2; 4, 2, 3; 5, 2, 3. Содержание ветвей: 1 — источник тока $I = 6 \text{ А}$, 2 — $R_1 = 1 \text{ Ом}$; 3 — параллельно $R_2 = 2 \text{ Ом}$ и $L = 0,5 \text{ Гн}$, 4 — $R_3 = 2 \text{ Ом}$; 5 — последовательно $R_4 = 2 \text{ Ом}$, разомкнутый ключ и источник напряжения $U = 6 \text{ В}$. Определить напряжение на резистивном элементе R_1 после замыкания ключа.

4.16. В схеме рис. 4.16 в момент времени $t = 0$ замыкается ключ, $R_1 = R_2 = 4 \text{ Ом}$, $L = 2 \text{ Гн}$, $U_1 = 4 \text{ В}$, $U_2 = 12 \text{ В}$. Определить токи всех ветвей при переходном процессе.

Решить задачу, заменив L -элемент на $C = 0,25 \text{ Ф}$.

4.17. В схеме рис. 4.17 $I_1 = 3 \text{ А}$, $I_2 = 2 \text{ А}$, $R_1 = R_2 = 2 \text{ Ом}$, $C = 0,25 \text{ Ф}$. Определить токи всех ветвей после размыкания ключа. Решить задачу, заменив C -элемент на $L = 1 \text{ Гн}$.

4.18м. В цепи (рис. 4.18) $U_1=U_2=4$ В, $R_1=R_4=R_6=2$ Ом, $R_2=4$ Ом, $R_5=1$ Ом, $C=0,5$ Ф. В момент времени $t=0$ размыкается ключ.

1. Составить уравнение состояния цепи.

2. Получить решение уравнения состояния — точное и приближенное (методом Эйлера), ограничившись вычислением 4—6 значений с шагом $0,1 \tau$, где τ — постоянная времени цепи.

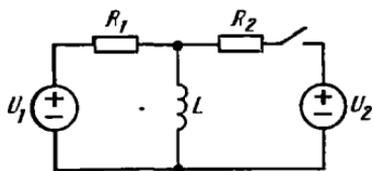


Рис. 4.16

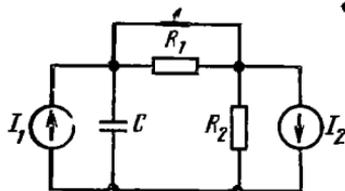


Рис. 4.17

3. Построить графики u_C , соответствующие точному и приближенному решениям.

4.19м. В цепи (рис. 4.19) $I_1=4$ А, $I_2=2$ А, $R_1=1$ Ом, $R_3=1/3$ Ом, $R_4=0,5$ Ом, $R_5=0,25$ Ом, $R_6=2$ Ом, $L_2=0,5$ Гн. В момент времени $t=0$ замыкается ключ.

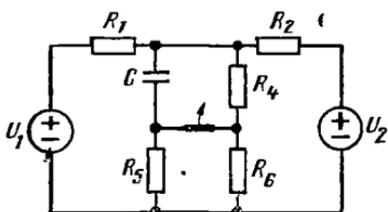


Рис. 4.18

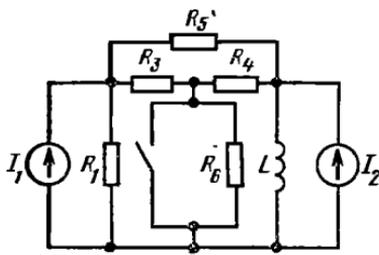


Рис. 4.19

1. Составить уравнение состояния цепи.

2. Получить решение уравнения состояния — точное и приближенное (методом Эйлера), ограничившись вычислением 4—6 значений с шагом $0,1 \tau$.

3. Построить графики i_L , соответствующие точному и приближенному решениям.

4.20. Параметры цепи (рис. 4.20): $R_1=3,4$ Ом, $L_1=0,7$ Гн, $R_2=0,6$ Ом, $L_2=0,3$ Гн, $C=0,333$ Ф, $U=10$ В. Рассмотреть два переходных процесса, вызванных: 1) замыканием ключа K_1 в момент времени $t=0$; 2) замыканием ключа K_2 через 10 с после замыкания ключа K_1 . Определить $u_C(t)$ и $i_{L_2}(t)$ в каждом из процессов.

4.21. Определить $i_L(t)$ и $u_C(t)$, построить соответствующие графики, если в цепи (рис. 4.21) в момент $t=0$ размыкается ключ. $U=10$ В, $R_1=R_2=2$ Ом, $L=1$ Гн, $C=0,25$ Ф.

4.22. Цепь (рис. 4.22) включается в момент времени $t=0$ под действием источника напряжения $U=0$ В и через 1 с ключ замыкается; $R_1=R_2=1$ Ом, $L=2$ Гн, $C=1$ Ф. Определить выражения $i(t)$ и $u_C(t)$ при переходном процессе, вызванном отключением цепи.

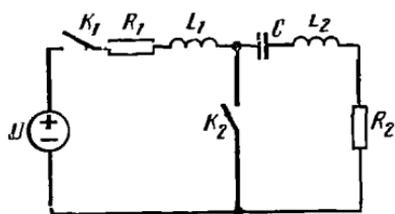


Рис. 4.20

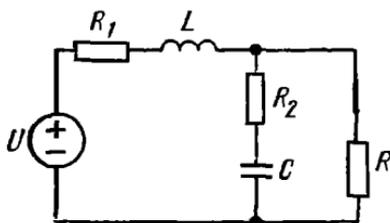


Рис. 4.21

4.23р. Структура цепи определяется числами 1, 3, 1; 2, 1, 3; 3, 1, 3; 4, 1, 2; 5, 1, 2; 6, 2, 3; 7, 2, 3. Содержание ветвей: 1 — источник тока $I=3$ А; 2 — $R_1=2$ Ом; 3 — $C=0,5$ Ф; 4 — $R_2=2$ Ом; 5 — $L=1$ Гн; 6 — $R=1$ Ом; 7 — разомкнутый ключ.

В момент времени $t=0$ ключ замыкается. Найти выражения $u_C(t)$ и $i_L(t)$.

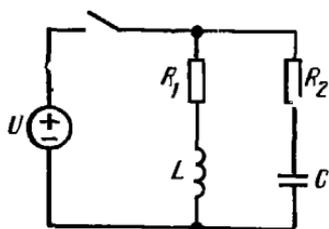


Рис. 4.22

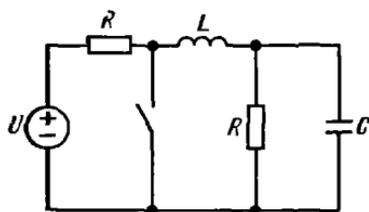


Рис. 4.24

4.24. В цепи (рис. 4.24) $U=8$ В, $R=1$ Ом, $L=1$ Гн, $C=0,25$ Ф. Определить $u_C(t)$ и $i_L(t)$ после замыкания ключа в момент времени $t=0$.

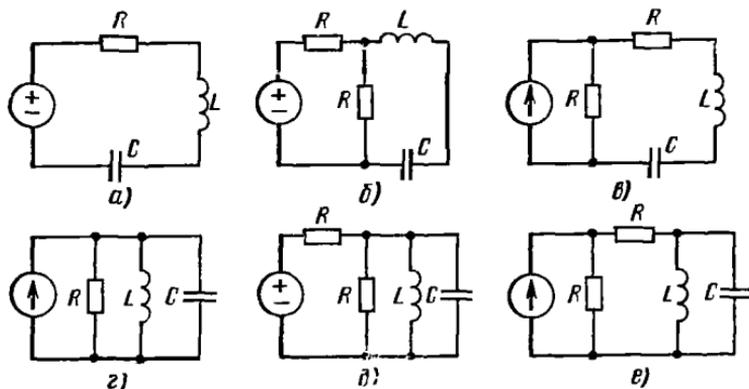


Рис. 4.25

4.25м. Цепи (рис. 4.25, *a—e*) составлены из элементов R , L и C . Корни характеристического уравнения цепи (рис. 4.25, *a*) $p_{1,2} = -1 \pm j$. Определить корни характеристического уравнения и практическую продолжительность переходного процесса для каждой из остальных цепей.

4.26р. Структура цепи определяется числами: 1, 4, 1; 2, 1, 2; 3, 1, 2; 4, 2, 3; 5, 3, 4; 6, 3, 4. Содержание ветвей: 1—источник напряжения $U=4$ В; 2—разомкнутый ключ; 3— $R=1$ Ом; 4— $R=1$ Ом; 5—последовательно $R_1=2$ Ом и $L_1=1$ Гн; 6— $L_2=0,5$ Гн. В момент $t=0$ замыкается ключ. Составить уравнения состояния и определить i_{L1} и i_{L2} .

4.27м. Дана цепь (рис. 4.27): $I=10$ А, $R=R_1=1$ Ом, $R_2=0,333$ Ом, $L=1$ Гн, $C=1$ Ф. В момент времени $t=0$ ключ размы-

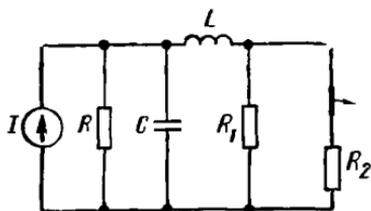


Рис. 4.27

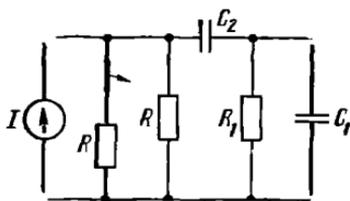


Рис. 4.28а

кается. Составить уравнения переменных состояния и определить входное напряжение цепи.

4.28р. В цепи (рис. 4.28) в момент времени $t=0$ размыкается ключ

$$R=1 \text{ Ом}, R_1=0,5 \text{ Ом}, C_1=1 \text{ Ф}, C_2=0,5 \text{ Ф}, I=4 \text{ А}.$$

1. Составить уравнения переменных состояния цепи и определить $u_{C1}(t)$ и $u_{C2}(t)$.

2. Используя алгоритм Эйлера, вычислить $u_{C1}(t)$ и $u_{C2}(t)$ приближенно; ограничиться при вычислении 8—10 точками с шагом $\Delta t=h=0,05$ с. Представить схему алгоритма.

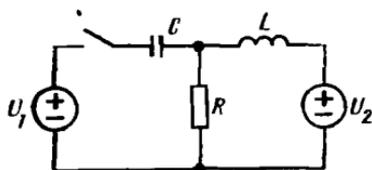


Рис. 4.29

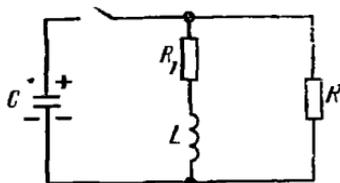


Рис. 4.30

4.29. В цепи (рис. 4.29) в момент времени $t=0$ замыкается ключ. $U_1=1$ В, $U_2=3$ В, $R=1,5$ Ом, $L=1$ Гн, $C=1/12$ Ф. Составить уравнения переменных состояния, определить $u_C(t)$ и токи всех ветвей.

4.30м. Цепь (рис. 4.30) характеризуется параметрами: $C=1$ Ф, $L=1$ Гн; $R_1=3$ Ом, C -элемент заряжен до $U=10$ В.

1. Составить уравнения состояния. 2. Определить значение R , при котором процесс разряда C -элемента будет предельным аperiодическим. 3. Получить выражения $u_C(t)$ и $i_L(t)$. 4. Показать, что начальная энергия C -элемента во время переходного процесса полностью преобразуется в тепловую.

4.31. В цепи (рис. 4.31) $U_1=10$ В, $U_2=15$ В, $R_1=R_2=R_3=R_6=5$ Ом, $L_5=0,893$ Гн, $C_4=0,25$ Ф; в момент $t=0$ размыкается ключ.

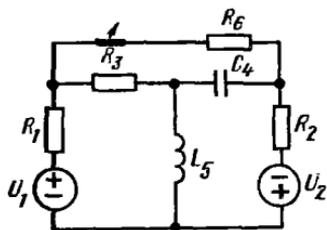


Рис. 4.31

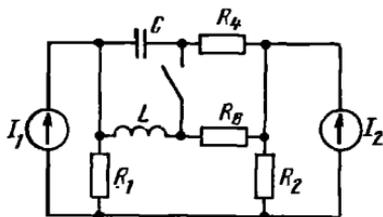


Рис. 4.32

1. Составить уравнения переменных состояния и определить $u_C(t)$ и $i_L(t)$. 2. Вычислить $u_C(t)$ и $i_L(t)$ приближенно, используя алгоритм Эйлера. Ограничиться 8—10 точками с шагом $\Delta t=h=0,05$ с.

4.32. В цепи, представленной на рис. 4.32, $R_1=0,2$ Ом, $R_2=0,1$ Ом, $R_4=0,125$ Ом, $R_6=0,5$ Ом, $L=0,32$ Гн, $C=0,625$ Ф, $I_1=8$ А= I_2 .

1. Составить уравнения состояния для цепи после замыкания ключа и определить $u_C(t)$ и $i_L(t)$.

2. Вычислить $u_C(t)$ и $i_L(t)$ приближенно, используя алгоритм Эйлера. Ограничиться 6—8 точками с шагом $\Delta t=0,05$ с.

4.33р. Структура цепи задана тройками чисел: 1, 3, 1; 2, 1, 3; 3, 1, 2; 4, 2, 3. Содержание ветвей: 1 — параллельно источник тока $I=1$ А и замкнутый ключ, 2 — $C_1=0,707$ Ф, 3 — параллельно $C_2=0,333$ Ф и $R=1$ Ом, 4 — $L=0,0849$ Гн. В момент времени $t=0$ размыкается ключ. Составить уравнения состояния и определить входную реакцию.

4.34. К цепи (рис. 4.34), имеющей параметры элементов: $R_1=2$ Ом, $R_2=1$ Ом, $L_1=1$ Гн, $L_2=2$ Гн, $C=1$ Ф, подключается ис-

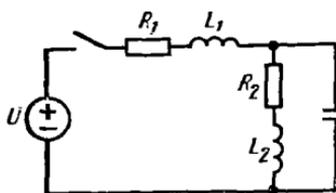


Рис. 4.34

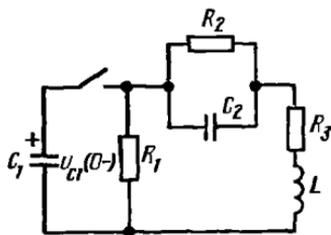


Рис. 4.35

точник напряжения $U=6$ В. Составить систему уравнений состояния и определить i_{L2} .

4.35. Заряженный до напряжения $u_{C1}(0-)=10$ В емкостный элемент подключается к цепи — рис. 4.35, $C_1=C_2=0,2$ Ф, $R_1=R_2=5$ Ом, $R_3=0,5$ Ом, $L=0,25$ Гн. Составить уравнения переменных состояния, определить $u_{C1}(t)$.

4.36м. Составить уравнения переменных состояний для цепи (рис. 4.36) $R_1=R_3=1$ Ом, $R_2=2$ Ом, $L_1=L_2=1$ Гн, $C=1$ Ф. Определить частоты собственных колебаний цепи.

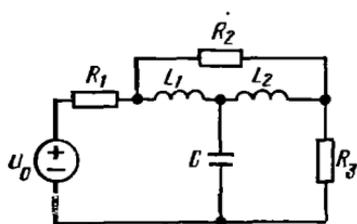


Рис. 4.36

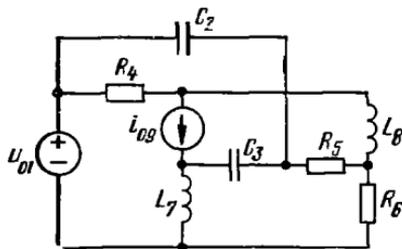


Рис. 4.37

4.37. Составить уравнения состояния для цепи, представленной на рис. 4.37.

4.38р. Структура цепи определяется тройками чисел: 1, 3, 1; 2, 1, 2; 3, 2, 3. В ветвях: 1 — источник напряжения $u_0(t)$; 2 — параллельно $R_1=2$ Ом, $C_1=1$ Ф, 3 — параллельно $R_2=1$ Ом, $C_2=0,5$ Ф.

Источник действует на цепь с момента времени $t=0$. Составить уравнение состояния цепи. Приняв $u_0(t)=U=12$ В, определить напряжения C -элементов.

4.39р. Составить уравнения состояния для цепи, структура которой задана тройками чисел: 1, 2, 1; 2, 2, 1; 3, 1, 2. Содержание ветвей: 1 — последовательно источник напряжения u_0 и разомкнутый ключ, $R_1=1$ Ом и $L_1=1$ Гн; 2 — параллельно источник тока i_0 и $L_3=1$ Гн; 3 — последовательно $L_2=1$ Гн и $R_2=1$ Ом. В момент времени $t=0$ ключ замыкается.

Приняв $u_0=U=4$ В и $i_0=I_0=2$ А, определить токи индуктивных элементов.

4.40. В цепи (рис. 4.40), находящейся под действием источника постоянного напряжения $U=6$ В, в момент $t=0$ размыкается ключ. $R_1=2$ Ом, $R_2=4$ Ом, $L=1$ Гн. Определить $i_L(t)$ при значениях параметра L_2 2, 1 и 5 Гн. Построить графики $i(t)$.

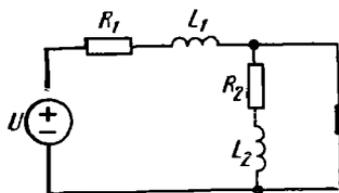


Рис. 4.40

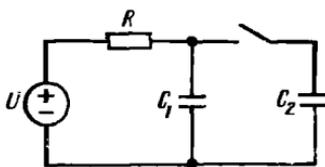


Рис. 4.41

4.41м. В цепи на рис. 4.41 $R=0,333$ Ом, $C_1=1$ Ф, $C_2=2$ Ф, $U=6$ В.

В момент времени $t=0$ замыкается ключ. Определить $u_C(t)$.

4.42м. Емкостный элемент $C_1=1$ Ф заряжен до напряжения $u_{C1}(0-)=6$ В, $C_2=2$ Ф — до $u_{C2}(0-)=3$ В. В момент времени $t=0$ образуется последовательный контур из этих элементов и резистивного элемента $R=3$ Ом, причем соединяются однополярные обкладки C -элементов. Составить уравнения состояния, определить напряжения C -элементов и ток цепи.

4.43м. В цепи (рис. 4.43) $R_1=R_2=1$ Ом, $L_1=L_2=L_3=1$ Гн. Составить уравнения переменных состояния и определить частоты собственных колебаний цепи.

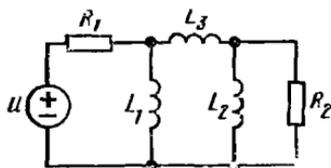


Рис. 4.43

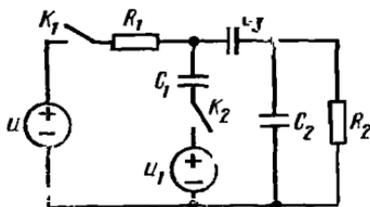


Рис. 4.44

4.44м. Цепь представлена на рис. 4.44; $R_1=R_2=0,333$ Ом, $C_1=C_2=C_3=1$ Ф. Предполагая ключи замкнутыми, составить уравнения состояния и определить частоты собственных колебаний цепи.

4.45м. В условиях задачи 4.44м принять $u(t)=U=6$ В, $u_1(t)=9$ В. Решить уравнения состояния и определить напряжения C -элементов, полагая, что переходный процесс вызван:

- 1) замыканием при $t=0$ ключа K_1 (ключ K_2 предварительно замкнут);
- 2) замыканием в момент времени $t=0$ ключа K_2 (ключ K_1 предварительно замкнут).

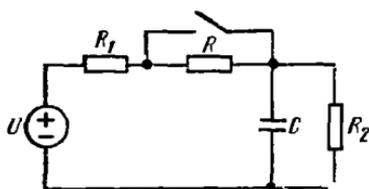


Рис. 4.46

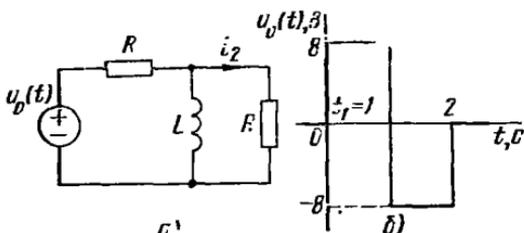


Рис. 4.47

4.46. В цепи (рис. 4.46) действует источник постоянного напряжения $U=12$ В. После замыкания ключа в момент времени $t=0$ $i_{R1}(t)=2+e^{-2t}$. Определить параметры R , R_1 , R_2 и C , если $i_{R1}(0-)=1,5$ А.

4.47. На вход цепи (рис. 4.47, а), не содержащей запаса энергии, при $t=0$ подается напряжение $u_0(t)$, заданное графиком на рис.

4.47, б. Определить параметры цепи R и L , если в момент времени $t_1=1$ с ток i_2 претерпевает разрыв от значения $i_2(t_1-)=0,5$ А до $i_2(t_1+)= -3,5$ А.

4.48. Структура цепи задана тройками чисел: 1, 2, 1; 2, 1, 2; 3, 1, 2. Содержание ветвей: 1 — последовательно источник постоянного напряжения $U=10$ В, резистивный элемент R_1 и разомкнутый ключ; 2 — резистивный элемент R_2 ; 3 — последовательно L - и C -элементы. Запаса энергии в цепи нет. При включении цепи в момент времени $t=0$ напряжение C -элемента изменяется по выражению $u_C(t)=4-4e^{-6t}-24te^{-6t}$. По какому закону будет изменяться напряжение C -элемента, если ключ разомкнуть через $t_1=1$ с после включения цепи?

4.49. На вход цепи (рис. 4.49) без запаса энергии с момента $t=0$ включается источник постоянного напряжения U . Какие из

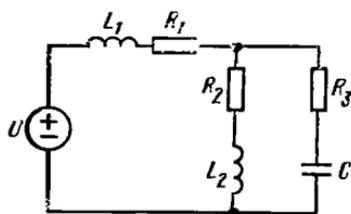


Рис. 4.49

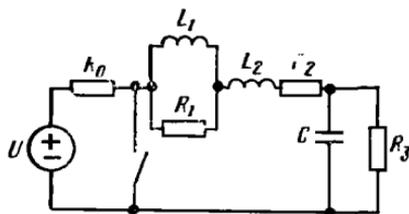


Рис. 4.50

приведенных далее выражений тока i_1 при переходном процессе заведомо неверны?

1. $i_1=2-2e^{-t}\cos 4t+4e^{-2t}\sin 8t$;
2. $i_1=e^{-3t}+e^{-2t}-2e^{-4t}$;
3. $i_1=2-e^{-t}(\cos 4t-2\sin 4t)-e^{-t}$;
4. $i_1=1+e^{-t}(\cos 4t-2\sin 4t)-2e^{-2t}$.

4.50. Цепь (рис. 4.50) находится под действием источника постоянного напряжения $U=12$ В; $R_0=R_1=R_2=R_3=2$ Ом, $L_1=1$ Гн, $L_2=2$ Гн, $C=0,25$ Ф. В момент времени $t=0$ ключ замыкается. Доказать, что во время переходного процесса ток в R_3 не может превышать 4 А.

4.51. Определить порядок цепей, представленных на рис. 4.51.

4.52. Последовательный RC -контур включается под действие постоянного напряжения U ; в одном случае $u_C(0-)=0$, в другом — $u_C(0-)\neq 0$. Будет ли в обоих случаях иметь место пропорциональность между уровнем воздействия и уровнем реакции — током цепи?

4.53. В цепи (рис. 4.53) в момент времени $t=0$ размыкается ключ; $U=6$ В. За весь переходный процесс в резистивном элементе выделилась энергия $W_R=4$ Дж. Определить параметры R и C .

4.54. Последовательный RC -контур без запаса энергии включается на постоянное напряжение U . Установить соотношение между энергией, запасенной в C -элементе, и энергией, преобразованной в тепловую в R -элементе за весь переходный процесс. Возможно ли изменение этого соотношения за счет варьирования величины C ?

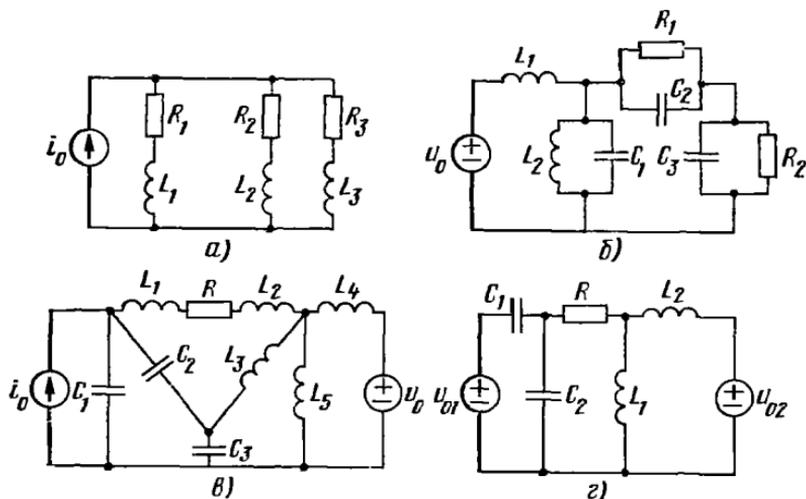


Рис. 4.51

Рассмотреть поставленные вопросы, приняв, что к источнику постоянного напряжения включается последовательный RLC -контур без запаса энергии.

4.55. На рис. 4.55 представлен график тока последовательного RLC -контура при включении его под действие постоянного напряжения. Определить (приблизительно) величину добротности контура.

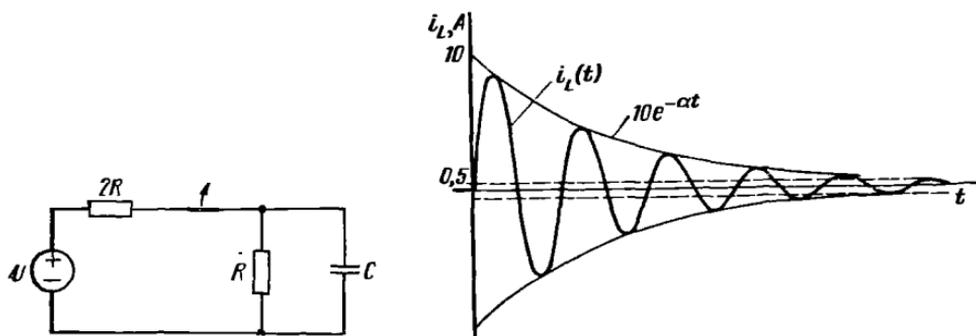


Рис. 4.53

Рис. 4.55

4.56. На вход некоторой двухполюсной цепи без запаса энергии в момент $t=0$ включается источник постоянного напряжения U . Свободная составляющая входного тока двухполюсника определяется уравнением $i_{св}(t) = I_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_c t + \gamma)$. Предложить ряд схем

с минимальным числом элементов, в которых возможен подобный закон изменения тока. Установить соотношения, связывающие δ , ω_c с параметрами элементов.

4.57. Цепи, изображенные на рис. 4.57, составлены из одинаковых элементов $R=1$ Ом, $L=1/8$ Гн, $C=2/3$ Ф и находятся под воз-

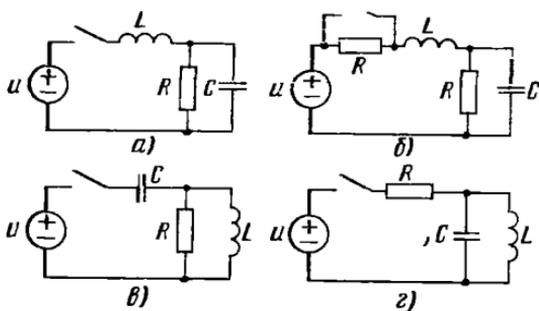


Рис. 4.57

действием одинаковых источников напряжения u . Определить выражение $i_L(t)$ при $t > 0$ для цепей рис. 4.57, б, в, г, если для цепи рис. 4.57, а $i_L(t) = (4 - 16e^{-2t} + 12e^{-6t})\delta_1(t)$.

РЕШЕНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

4.1. При определении напряжения целесообразно исходить из выражения $u_{12}(t) = R_0 i(t)$.

4.2. Для выполнения поставленного условия необходимо уменьшить постоянную времени; это достигается включением последовательно в контур добавочного резистивного элемента $R_{доб}$, величину которого следует определить.

4.6. По заданной структуре и содержанию ветвей изображаем схему цепи (рис. 4.6, а). Определяем независимые начальные условия. Так как воздействие (напряжение) не является функцией времени, то для определения $i_L(0-)$ и $u_C(0-)$ L -элемент замыкаем накоротко, а ветвь с C -элементом размыкаем.

$$\text{Тогда } i_L(0-) = \frac{U}{R_{вх}} \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 1,5 \text{ А,}$$

$$\text{где } R_{вх} = R + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 4 \text{ Ом, } u_C(0-) = \frac{U}{R_{вх}} \frac{R_1}{R_1 + R_2} R_2 = 6 \text{ В.}$$

После размыкания ключа исходная цепь распадается на две простые цепи первого порядка, процессы в которых протекают независимо (рис. 4.6, б, в). В цепи (рис. 4.6, б) ток вынужденного режима

$$i_{Lв} = \frac{U}{R_1 + R} = 2 \text{ А, } R_0 = R + R_1 = 6 \text{ Ом, } \delta_1 = \frac{R_0}{L} = 3 \text{ 1/с.}$$

$$i_L = i_{Lв} + A_1 e^{-\delta_1 t}, \text{ где } A_1 = i_L(0+) - i_{Lв}(0+) = 0,5 \text{ А.}$$

Окончательно $i_L = 2 - 0,5e^{-3t}$.

В цепи рис. 4.6, в протекает только свободный процесс

$$u_C = A_2 e^{-\delta_2 t}, \quad \text{где } \delta_2 = \frac{1}{R_2 C} = 4^1, \text{ с}^{-1},$$

$$A_2 = u_C(0+) = u_C(0-) = 6 \text{ В} \quad \text{и} \quad u_C = 6e^{-4t}.$$

Графики найденных функций представлены на рис. 4.6, з.

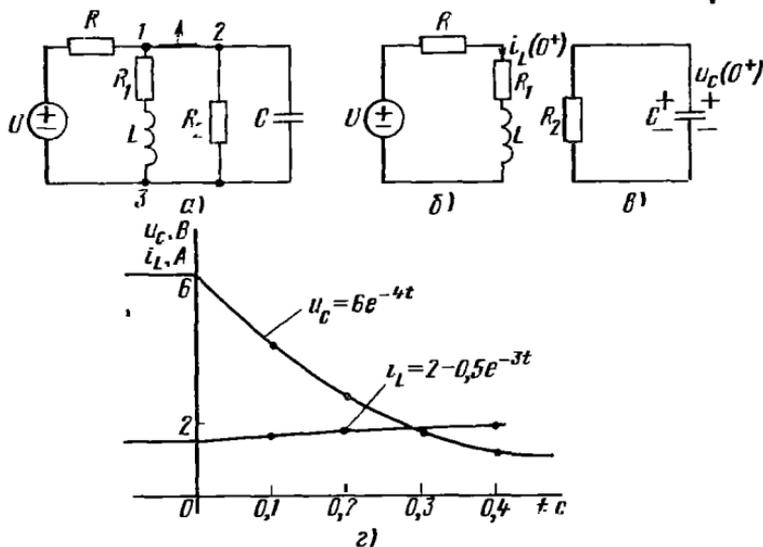


Рис. 4.6

Приведенные графики можно построить без определения аналитических выражений функций. Для построения необходимо располагать начальными величинами $i_L(0+)$ и $u_C(0+)$, а также значениями вынужденных составляющих искомым реакций.

4.8 и 4.9. Обратить внимание на то, что постоянные времени цепей много меньше $t_1 = 1$ с.

4.10. В соответствии с условиями изображаем схему цепи (рис. 4.10, а). Независимое начальное условие: $u_C(0-) = U = 3$ В.

Используя теорему об эквивалентном источнике, сводим задачу к простейшей — включению $R_0 C$ -цепи на постоянное напряжение U_3 .

1. Размыкаем C -элемент и определяем U_3 (рис. 4.10, б).

$$U_3 = \frac{U}{1,5R} R = 2 \text{ В}.$$

2. Находим R_0 , определяя входное сопротивление цепи относительно выводов накопительного элемента (в данном случае C -элемента), при исключении из цепи источников (рис. 4.10, в)

$$R_0 = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{R}{3} = \frac{1}{3} \text{ Ом}.$$

Исходная задача приведенными действиями сведена к элементарной (рис. 4.10, *з*). Решение такой задачи предполагается известным: $u_C = u_{Cв} + Ae^{-\delta t}$, где

$$u_{Cв} = U_3, \quad A = u^C(0+) - u_{Cв}(0+), \quad \delta = \frac{1}{R_0 C}.$$

Численно $u_C = 2 + e^{-3t}$.

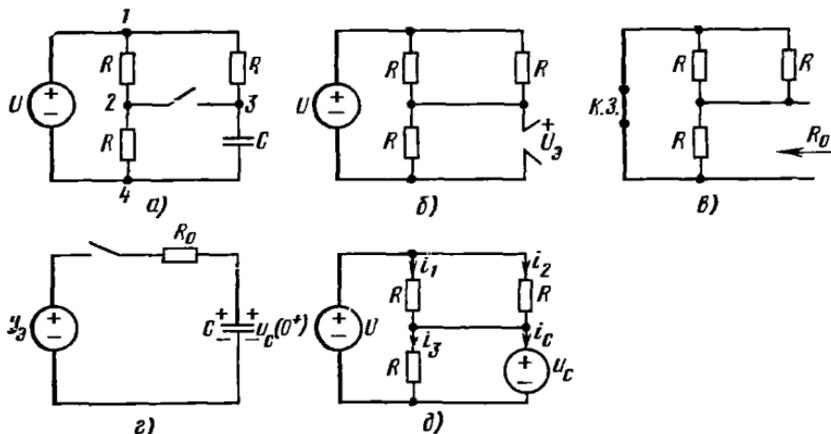


Рис. 4.10

Заменяем C -элемент источником напряжения u_C (рис. 4.10, *д*) и определяем токи всех ветвей цепи:

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = -3e^{-3t}, \quad i_3 = \frac{u_C}{R_1} = 2 + e^{-3t},$$

$$i_1 = i_2 = \frac{U - u_C}{R} = 1 - e^{-3t}.$$

4.13. Определить $u_C(0-) = u_C(0+)$ и изобразить схему для $t=0+$; по заданному значению $u_{R_1}(0+)$ расчетом схемы найти R_1 .

4.15. Схема цепи показана на рис. 4.15, *а*. Независимые начальные условия $i_L(0-) = I \frac{R_1}{R_1 + R_3} = 2A$. Выражение $i_L(0-)$ получаем при рассмотрении цепи до замыкания ключа ($t < 0$). При этом индуктивный элемент представляется в виде замкнутой накоротко ветви, так как цепь находится под действием источника постоянного тока и режим предполагается установившимся.

После замыкания ключа ($t > 0$) определяем ток индуктивности. Используя при этом теорему об эквивалентном источнике, можно свести задачу нахождения тока i_L заданной цепи к более простой — включению параллельного $R_0 L$ контура под действие источника постоянного тока I_3 .

1. Замыкаем накоротко элемент L (ключ K замкнут, рис. 4.15, б) и определяем I_3 . Используем метод узловых напряжений: $G_{11}U_{(1)}=I_{(1)}$, где $G_{11}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}=2$ См собственная проводимость узла 1;

$$I_{(1)}=I-\frac{U}{R_4}=3 \text{ А} - \text{ток узла 1}; \quad U_1=U_{(1)}=\frac{I_{(1)}}{G_{11}}=1,5 \text{ В.}$$

Ток $I_3=I-I_{R1}-I_{R2}=I-\frac{U_1}{R_1}=4,5$ А, так как $I_{R2}=0$ (ветвь замкнута накоротко).

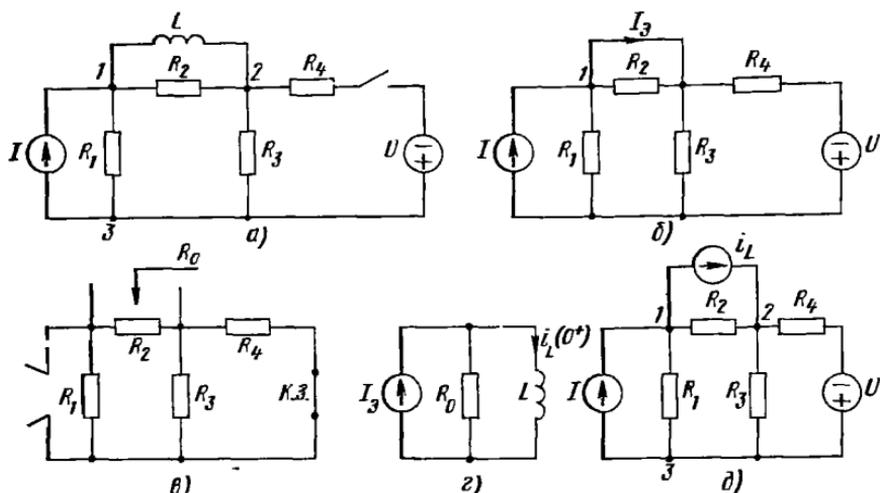


Рис. 4.15

2. Исключаем из цепи источники и определяем входное сопротивление относительно выводов L -элемента (рис. 4.15, в)

$$R_0 = \frac{R_2 \left(R_1 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \right)}{R_2 + R_1 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} = 1 \text{ Ом.}$$

Задача сведена к элементарной (рис. 4.15, г). Решение подобной задачи известно: $i_L = i_{LВ} + Ae^{-\delta t}$, где $i_{LВ} = I_3 = 4,5$ А, $A = i_L(0+) - i_{LВ}(0+) = -2,5$ А, $\delta = R_0/L = 2$ 1/с. Окончательно $i_L = 4,5 - 2,5e^{-2t}$.

Располагая выражением i_L , можно определить любую реакцию исходной цепи, например напряжения ветвей. Представляем L -элемент в виде источника тока i_L и выполняем расчет получающейся резистивной цепи (рис. 4.15, д). По методу узловых напряжений

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{(1)} \\ u_{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{(1)} \\ i_{(2)} \end{bmatrix};$$

$$G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 1,5 \text{ См}; \quad G_{22} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = 1,5 \text{ См};$$

$$G_{12} = G_{21} = -\frac{1}{R_2} = -0,5 \text{ См};$$

$$i_{(1)} = I - i_L = 1,5 + 2,5 e^{-t}; \quad i_{(2)} = -\frac{U}{R_4} + i_L = 1,5 - 2,5 e^{-t}.$$

Решение уравнений дает результат

$$u_1 = u_{(1)} = 1,5 + 1,25 e^{-t}; \quad u_2 = u_{(2)} = 1,5 - 1,25 e^{-t}.$$

4.18 и 4.19. Для получения уравнений состояния использовать теоремы об эквивалентных источниках; решить предварительно задачу 4.3. Уравнение состояния необходимо для приближенного решения задачи.

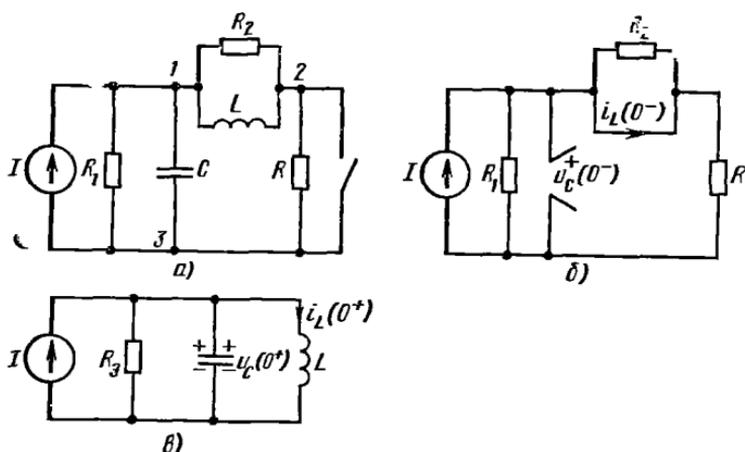


Рис. 4.23

4.23. Схема цепи представлена на рис. 4.23, а. Так как ток источника во времени не изменяется, то независимые начальные условия устанавливаются по схеме с замкнутым накоротко L -элементом и разомкнутой ветвью с C -элементом. В цепи до замыкания ключа (рис. 4.23, б)

$$u_C(0^-) = I \frac{R R_1}{R + R_1} = 2 \text{ В}, \quad i_L(0^-) = I \frac{R_1}{R_1 + R} = 2 \text{ А}.$$

После замыкания ключа образуется параллельный колебательный контур с $R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ (рис. 4.23, в). Выбрав в качестве переменной ток индуктивности, получаем дифференциальное уравнение

$$i_R + i_C + i_L = I, \quad u = u_L = L \frac{di_L}{dt}; \quad i_R = \frac{u}{R_3}, \quad i_C = C \frac{du}{dt}.$$

После подстановки имеем

$$LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L}{R_3} \frac{di_L}{dt} + i_L = I.$$

Характеристическое уравнение и его корни

$$LCp^2 + \frac{L}{R_3} p + 1 = 0, \quad p_{1,2} = -\frac{1}{2R_3C} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2R_3C}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -1 \pm j1.$$

Вынужденный режим

$$i_{L_B} = I = 3 \text{ А}; \quad u_{C_B} = 0; \quad i_L = i_{L_B} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

Для определения A_1 и A_2 необходимо знать $i_L(0+)$ и $i'_L(0+)$.

$$i_L(0+) = i_L(0-) = 2 \text{ А}; \quad i'_L(0+) = \frac{1}{L} u_L(0+) = \frac{1}{L} u_C(0+) = 2 \text{ А/с}.$$

Имеем систему уравнений

$$A_1 + A_2 = i_L(0+) - i_{L_B}(0+) = -1,$$

$$p_1 A_1 + p_2 A_2 = i'_L(0+) = 2.$$

Постоянные интегрирования

$$A_1 = \frac{\sqrt{2} e^{-j45^\circ}}{j2}; \quad A_2 = \bar{A}_1 = \frac{j\sqrt{2} e^{j45^\circ}}{-j2}.$$

После преобразований, используя формулу Эйлера, получаем

$$i_L = 3 + \sqrt{2} e^{-t} \frac{e^{j(t-45^\circ)} - e^{-j(t-45^\circ)}}{j2} = 3 + \sqrt{2} e^{-t} \sin(t - 45^\circ);$$

$$u_C = u = L \frac{di_L}{dt} = 2 e^{-t} \cos t.$$

4.25. Обратить внимание на то, что схемы рис. 4.25, *a* и *г* дуальны.

4.26. Схема цепи представлена на рис. 4.26, *a*. Так как воздействие от времени не зависит, то замыкаем накоротко индуктивные элементы и определяем независимые начальные условия $i_{L_1}(0-) = 0$; $i_{L_2}(0-) = U/2R = 2 \text{ А}$.

В качестве переменных состояния выбираем токи индуктивных элементов i_{L_1} и i_{L_2} .

Для формирования уравнений состояния выбираем дерево графа цепи, в которое входят: ветвь — источник напряжения и ветви с резистивными элементами; ветви с L -элементами относятся к хордам. На рис. 4.26, *б* сплошными линиями изображено дерево графа, а пунктиром — хорды (ветви связи); каждая ветвь обозначена соответствующим параметром.

Составляем уравнения по законам Кирхгофа для главных сечений и главных контуров:

$$i_{L1} + i_{L2} = i_R \quad (4.1) \quad i_{L1} = i_{R1} \quad (4.2)$$

$$u_R + u_{L2} = U \quad (4.3) \quad u_R + u_{R1} + u_{L1} = U \quad (4.4)$$

Решая уравнения (4.3) и (4.4) относительно u_{L1} и u_{L2} и выражая в них u_R и u_{R1} через переменные состояния [из уравнений (4.1) и (4.2)], получаем:

$$u_{L1} = -R_1 i_{L1} - R(i_{L1} + i_{L2}) + U,$$

$$u_{L2} = -R i_{L1} - R i_{L2} + U.$$

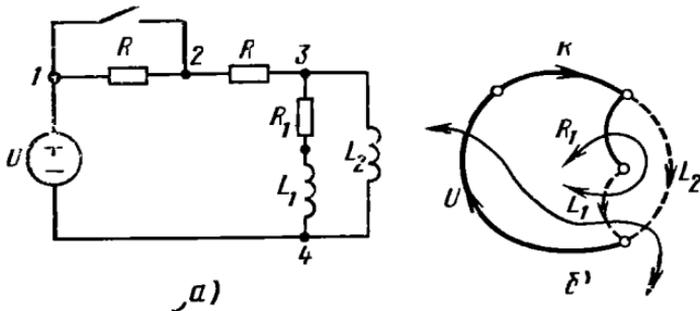


Рис. 4.26

Окончательно уравнения состояния имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{di_{L1}}{dt} &= -\frac{R+R_1}{L_1} i_{L1} - \frac{R}{L_1} i_{L2} + \frac{1}{L_1} U = -3i_{L1} - i_{L2} + 4, \\ \frac{di_{L2}}{dt} &= -\frac{R}{L_2} i_{L1} - \frac{R}{L_2} i_{L2} + \frac{1}{L_2} U = -2i_{L1} - 2i_{L2} + 8. \end{aligned} \right\}$$

В матричной форме

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R+R_1}{L_1} & -\frac{R}{L_1} \\ -\frac{R}{L_2} & -\frac{R}{L_2} \end{bmatrix} + \mathbf{B}U,$$

— матрица системы (не смешивать с матрицей соединений).

Уравнения состояния позволяют выполнить расчет вынужденного режима, определить частоты собственных колебаний цепи и значения производных переменных состояния в момент $t=0+$.

Так как воздействие от времени не зависит, то вынужденные составляющие будут постоянными величинами. Поэтому производные от переменных состояния в вынужденном режиме обращаются в нуль и уравнения состояния записывают в форме

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -\frac{R+R_1}{L_1} i_{L1a} - \frac{R}{L_1} i_{L2a} + \frac{1}{L_1} U = -3i_{L1a} - i_{L2a} + 4, \\ 0 &= -\frac{R}{L_2} i_{L1a} - \frac{R}{L_2} i_{L2a} + \frac{1}{L_2} U = -2i_{L1a} - 2i_{L2a} + 8, \end{aligned} \right\}$$

откуда $i_{L1a} = 0$; $i_{L2a} = U/R = 4$ А.

Определяем частоты собственных колебаний — собственные числа матрицы A

$$\det(p[1] - A) = \begin{vmatrix} p + \frac{R+R_1}{L_1} & \frac{R}{L_1} \\ \frac{R}{L_2} & p + \frac{R}{L_2} \end{vmatrix} = 0, \quad [1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$p^2 + \left(\frac{R+R_1}{L_1} + \frac{R}{L_2} \right) p + \frac{RR_1}{L_1 L_2} = p^2 + 5p + 4 = 0,$$

$$p_1 = -1/c, \quad p_2 = -4/c.$$

Определяем переменные состояния

$$i_{L1} = i_{L1a} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = A_1 e^{-t/c} + A_2 e^{-4t/c},$$

$$\dot{i}_{L1} = \dot{i}_{L1a} + p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t} = -A_1 e^{-t/c} - 4A_2 e^{-4t/c}.$$

Ранее было установлено, что $i_{L1}(0+) = i_{L1}(0-) = 0$. Из первого уравнения переменных состояния

$$\dot{i}_{L1}(0+) = -\frac{R+R_1}{L_1} i_{L1}(0+) - \frac{R}{L_1} i_{L2}(0+) + \frac{1}{L_1} U = 2 \text{ А/с.}$$

Используя значения $i_{L1}(0+)$ и $\dot{i}_{L1}(0+)$, находим постоянные интегрирования

$$\left. \begin{aligned} A_1 + A_2 &= 0 \\ -A_1 - 4A_2 &= 2 \end{aligned} \right\} \quad A_1 = 2/3, \quad A_2 = -2/3.$$

Окончательно

$$i_{L1} = \frac{2}{3} e^{-t/c} - \frac{2}{3} e^{-4t/c}.$$

Аналогично находим

$$i_{L2} = i_{L2a} + A_3 e^{p_1 t} + A_4 e^{p_2 t}, \quad i_{L2}(0+) = i_{L2}(0-) = 2 \text{ А,}$$

$$\dot{i}_{L2}(0+) = 4 \text{ А/с.}$$

Опуская выкладки, получаем

$$i_{L2} = 4 - \frac{4}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-4t}.$$

4.27. При формировании уравнений состояния ветвь с C -элементом отнести к дереву графа. Ознакомиться с решением задачи 4.26.

4.28. Приводится только приближенное решение с использованием алгоритма Эйлера.

Уравнения переменных состояния для исследуемой цепи имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_{C1}}{dt} &= -3u_{C1} - u_{C2} + 4 \\ \frac{du_{C2}}{dt} &= -2u_{C1} - 2u_{C2} + 8 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} u_{C1}(0-) &= 0, \\ u_{C2}(0-) &= 2\text{В} \end{aligned}$$

(формирование уравнений переменных состояния: см. решение задачи 4.26). Приведенным уравнениям соответствует точное решение

$$u_{C1} = \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-4t}; \quad u_{C2} = 4 - \frac{4}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-4t}.$$

В соответствии с алгоритмом Эйлера (явная форма) в данном случае имеем

$$\left. \begin{aligned} u_{C1(k+1)} &= u_{C1(k)} + hu'_{C1(k)}, \\ u_{C2(k+1)} &= u_{C2(k)} + hu'_{C2(k)}, \end{aligned} \right\}$$

где $h = \Delta t$ — шаг вычислений. Расчет ведут с начального момента времени $t = t_0$, в частном случае $t_0 = 0$. Приняв $h = 0,05$ с, приведем вычисления для моментов времени:

$$1. \quad t_0 = 0 \quad t_1 = t_0 + \Delta t = t_0 + h = 0,05 \text{ с,}$$

$$\begin{aligned} u_{C1(1)} &= u_{C1(0)} + hu'_{C1(0)} = u_{C1}(0-) + h \left. \frac{du_{C1}}{dt} \right|_{t=0} = \\ &= 0 + 0,05(-3 \cdot 0 - 2 + 4) = 0,1 \text{ В,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{C2(1)} &= u_{C2(0)} + hu'_{C2(0)} = u_{C2}(0-) + h \left. \frac{du_{C2}}{dt} \right|_{t=0} = \\ &= 2 + 0,05(-2 \cdot 0 - 2 \cdot 2 + 8) = 2,2 \text{ В;} \end{aligned}$$

$$2. \quad t_2 = t_1 + h = 0,1 \text{ с,}$$

$$u_{C1(2)} = u_{C1(1)} + hu'_{C1(1)} = 0,1 + 0,05(-3 \cdot 0,1 - 1 \cdot 2,2 + 4) = 0,175 \text{ В,}$$

$$u_{C2(2)} = u_{C2(1)} + hu'_{C2(1)} = 2,2 + 0,05(-2 \cdot 0,1 - 2 \cdot 2,2 + 8) = 2,37 \text{ В.}$$

Аналогично вычисляют функцию для других значений времени.

Результаты вычислений, приближенных с шагом $h=0,05$ с и по точным выражениям (для сопоставления), сведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

| t_c | | 0 | 0,05 | 0,1 | 0,15 | 0,2 | 0,25 | 0,3 | 0,35 | 0,4 | 0,45 | 1 |
|-------------|------------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $u_{C1}, В$ | точно | 0 | 0,088 | 0,156 | 0,208 | 0,246 | 0,274 | 0,293 | 0,305 | 0,312 | 0,315 | 0,233 |
| $u_{C2}, В$ | | 2 | 2,186 | 2,347 | 2,487 | 2,609 | 2,716 | 2,811 | 2,896 | 2,972 | 3,040 | 3,497 |
| $u_{C1}, В$ | приближено | 0 | 0,1 | 0,175 | 0,230 | 0,270 | 0,297 | 0,315 | 0,326 | 0,33 | 0,331 | 0,231 |
| $u_{C2}, В$ | | 2 | 2,2 | 2,37 | 2,516 | 2,641 | 2,750 | 2,845 | 2,929 | 3,004 | 0,070 | 3,514 |

(значения функций в таблице приведены с округлением третьего знака после запятой). По данным таблицы построены графики на рис. 4.286.

В вычислениях был принят шаг $h=0,05$ с, что составляет 20% постоянной времени $\tau_2=1/4=0,25$ с экспоненциальной составляющей точного решения, которая затухает быстрее. Такой выбор h обеспечил приемлемую точность вычислений. При уменьшении h точность возрастет, но одновременно увеличится и объем вычислений.

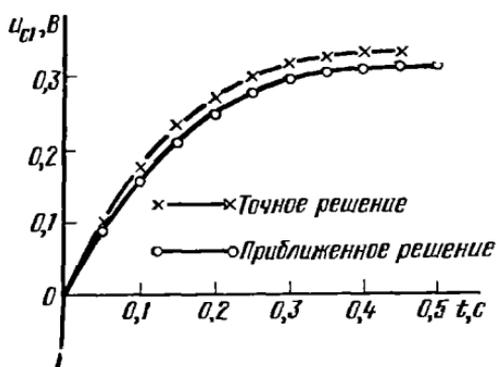


Рис. 4.286

4.30. Составить уравнения состояния, получить характеристическое уравнение и определить R из условия равенства корней этого уравнения.

Обратить внимание на наличие двух значений R , удовлетворяющих поставленному условию.

4.33. По условиям задачи изображаем схему цепи (рис. 4.33, а).

Для формирования уравнений состояния выбираем дерево графа, к ветвям которого относим ветви с C -элементами (на рис. 4.33, б дерево графа обозначено сплошными линиями).

За переменные состояния принимаем i_L , u_{C1} и u_{C2} . Уравнения для главных контуров:

$$-u_{C1} + u_L + u_{C2} = 0, \quad u_R - u_{C2} = 0.$$

Уравнения для главных сечений

$$i_{C2} + i_R - i_L = 0, \quad i_{C1} + i_L - I = 0.$$

Решая уравнения относительно u_L , i_{C1} и i_{C2} и выражая эти величины через переменные состояния и ток источника тока, после простых преобразований получаем:

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} u_{C1} - \frac{1}{L} u_{C2} = 11,78u_{C1} - 11,78u_{C2};$$

$$\frac{du_{C1}}{dt} = -\frac{1}{C_1} i_L + \frac{1}{C_1} I = -1,414i_L + 1,414;$$

$$\frac{du_{C2}}{dt} = +\frac{1}{C_2} i_L - \frac{1}{RC_2} u_{C2} = 3i_L - 3u_{C2}.$$

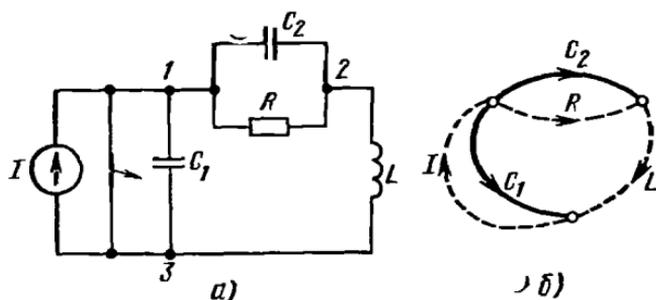


Рис. 4.33

Начальные условия нулевые, следовательно, $i_L(0+) = 0$,

$$u_{C1}(0+) = 0 \text{ и } u_{C2}(0+) = 0.$$

Матрица системы

$$A = \begin{bmatrix} 0, & 1/L, & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C_1}, & 0, & 0 \\ \frac{1}{C_2}, & 0, & -\frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}.$$

Собственные числа матрицы A определяются уравнением

$$\det(p[I] - A) = p^3 + \frac{1}{RC_2} p^2 + \left(\frac{1}{LC_1} + \frac{1}{LC_2} \right) p + \frac{1}{RLC_1C_2} = p^3 + 3p^2 + 52p + 50 = 0.$$

Коэффициенты уравнения вычислены с небольшими округлениями. Корни уравнения — частоты собственных колебаний цепи

$$p_1 = -1/c, \quad p_{2,3} = -\delta \pm j\omega_c = -1 \pm j7.$$

Решаем уравнения состояния относительно u_{C1} — входного напряжения цепи.

Напряжения $u_{C1B} = u_{C2B} = RI = 1$ В находим из уравнений состояния. При этом все производные в уравнениях приравниваются нулю, так как воздействие постоянно. Величины напряжений можно также найти непосредственно по схеме цепи.

Определяем входное напряжение в форме

$$u_{C1} = u_{C1B} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{-\delta t} \cos \omega_c t + A_3 e^{-\delta t} \sin \omega_c t.$$

Определяем $\dot{u}_{C1} = \frac{du_{C1}}{dt}$ и $\ddot{u}_{C1} = \frac{d^2 u_{C1}}{dt^2}$ и все три уравнения рассматриваем при $t = 0+$

$$u_{C1}(0+) = u_{C1B} + A_1 + A_2,$$

$$\dot{u}_{C1}(0+) = p_1 A_1 - \delta A_2 + \omega_c A_3,$$

$$\ddot{u}_{C1}(0+) = p_1^2 A_1 + (\delta^2 - \omega_c^2) A_2 - 2\omega_c \delta A_3.$$

Начальные значения производных определяем из уравнений состояния

$$\dot{u}_{C1}(0+) = -1,414 i_L(0+) + 1,414 = 1,414 \text{ В/с},$$

$$\ddot{u}_{C1}(0+) = -\frac{1}{C_1} \left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0+} = -\frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{L} u_{C1} - \frac{1}{L} u_{C2} \right) \Big|_{t=0+} = 0.$$

Имеем систему

$$\left. \begin{aligned} A_1 + A_2 &= -1, \\ -A_1 - A_2 + 7A_3 &= 1,414, \\ A_1 - 48A_2 - 14A_3 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Находим: $A_1 = 0,9627$; $A_2 = -1,9627$; $A_3 = 0,0591$. После преобразований получаем

$$u_{C1} = 1 + 0,9627 e^{-t} + 1,9636 e^{-t} \sin(7t - 88^\circ 28').$$

4.36. Выбрать подходящее дерево графа, составить уравнения для главных контуров и главных сечений и разбить их на две группы: 1) содержащие напряжения индуктивных хорд и токи емкостных ветвей дерева; 2) остальные уравнения. Вторую группу уравнений решать как систему, выражая напряжения и токи резистивных ветвей через переменные состояния и воздействующие сигналы.

Далее подставлять найденные i_{Rk} и u_{Rk} в первую группу уравнений и получить уравнения состояния.

4.38. Схема цепи дана на рис. 4.38, а. Существенным является наличие контура в цепи, образованного C -элементами и источником напряжения (C -контур). Поэтому напряжения емкостных ветвей связаны уравнением по второму закону Кирхгофа и их начальные значения не могут быть заданы независимо, т. е. произвольно.

При выборе подходящего дерева к его ветвям нельзя относить обе ветви с C -элементами. Отнесем к ветвям дерева элемент C_1 и источник напряжения; все остальные ветви, в том числе элемент C_2 , будут ветвями связи (хордами).

Граф цепи с выделенным сплошными линиями деревом показан на рис. 4.38, б.

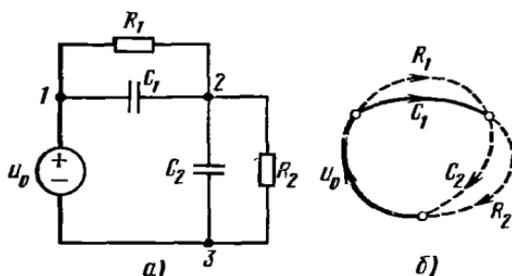


Рис. 4.38

Составляем уравнения по законам Кирхгофа для главных сечений и главных контуров:

$$\begin{aligned} i_{R_1} + i_{C_1} - i_{R_2} - i_{C_2} &= 0, & i_u - i_{C_2} - i_{R_2} &= 0, \\ u_{R_1} - u_{C_1} &= 0, & u_{C_2} + u_{C_1} - u_0 &= 0, & u_{R_2} + u_{C_1} - u_0 &= 0. \end{aligned}$$

Записанные уравнения путем несложных преобразований приводятся к следующему выражению:

$$C_1 \frac{du_{C_1}}{dt} = C_2 \frac{du_{C_2}}{dt} - \frac{1}{R_1} u_{C_1} + \frac{1}{R_2} u_{C_2}. \quad (4.5)$$

Так как $u_{C_2} = u_0 - u_{C_1}$, то после дифференцирования получаем $\frac{du_{C_2}}{dt} = \frac{du_0}{dt} - \frac{du_{C_1}}{dt}$. Подставляя u_{C_2} и $\frac{du_{C_2}}{dt}$ в (4.5), после преобразований записываем

$$\frac{du_{C_1}}{dt} = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} u_{C_1} + \frac{1}{R_2 (C_1 + C_2)} u_0 + \frac{C_2}{C_1 + C_2} \cdot \frac{du_0}{dt}.$$

В уравнение состояния вошло слагаемое, содержащее производную от напряжения источника.

Рассматриваемая цепь с двумя накопительными элементами C_1 и C_2 является цепью первого порядка (из-за наличия C -контур). Подобные цепи именуют вырожденными, в них возможны разрывы непрерывности тех величин, которые обычно изменяются непрерывно. В задаче, в частности, претерпевают разрывы непрерывности u_{C_1} и u_{C_2} , т. е.

$$u_{C_1}(0+) \neq u_{C_1}(0-) \quad \text{и} \quad u_{C_2}(0+) \neq u_{C_2}(0-).$$

Решаем задачу при $u_0(t) = U = 12$ В. Уравнение состояния

$$\frac{du_{C1}}{dt} = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} u_{C1} + \frac{1}{R_2 (C_1 + C_2)} U = -u_{C1} + 8.$$

Частота собственных колебаний

$$p_1 = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} = -1, \text{ с}^{-1}.$$

Вынужденный режим

$$0 = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} u_{C1B} + \frac{1}{R_2 (C_1 + C_2)} U;$$

$$u_{C1B} = \frac{U}{R_1 + R_2} R_1 = 8 \text{ В}; \quad u_{C2B} = \frac{U}{R_1 + R_2} R_2 = 4 \text{ В}.$$

Начальные условия в момент времени $t=0+$ устанавливаем, исходя из непрерывности изменения суммарного заряда C -элементов в каждом из узлов:

$$-C_1 u_{C1}(0+) + C_2 u_{C2}(0+) = -C_1 u_{C1}(0-) + C_2 u_{C2}(0-).$$

Учитывая, что запаса энергии в цепи до включения источника не было [$u_{C1}(0-) = u_{C2}(0-) = 0$] и уравнение $u_{C1} + u_{C2} = U$, получаем систему

$$-C_1 u_{C1}(0+) + C_2 u_{C2}(0+) = 0,$$

$$u_{C1}(0+) + u_{C2}(0+) = U.$$

Решая, находим $u_{C1}(0+) = 4$ В, $u_{C2}(0+) = 8$ В. Уравнения напряжения C -элементов:

$$u_{C1} = u_{C1B} + A_1 e^{p_1 t} = 8 - 4 e^{-t},$$

$$u_{C2} = u_{C2B} + A_2 e^{p_1 t} = 4 + 4 e^{-t}.$$

4.39. В соответствии с условиями строим схему цепи — рис. 4.39, а. Особенностью цепи является то, что к узлу смыкаются ис-

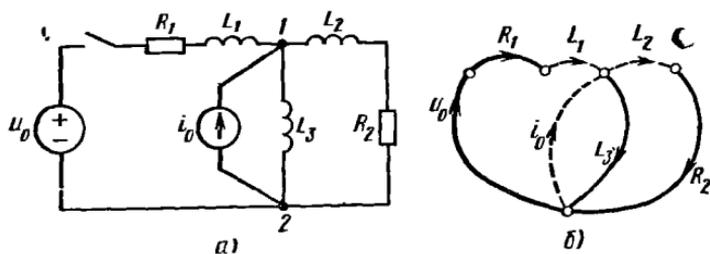


Рис. 4.39

точник тока и ветви, каждая из которых содержит L -элемент (L -узел). Очевидно, что токи индуктивных ветвей связаны уравнением по закону токов Кирхгофа и их начальные значения не могут быть заданы независимо, т. е. произвольно.

Следовательно, цепь является вырожденной, ее порядок — второй — меньше суммарного числа накопительных элементов. За переменные состояния выбираем токи i_{L1} и i_{L2} ; а для формирования уравнений — дерево графа, содержащее ветвь с источником напряжения, ветви с R -элементами и ветвь L_3 (все ветви с индуктивными элементами и источник тока к хордам отнестись нельзя, так как в этом случае остальные ветви не образуют дерева). Граф цепи изображен на рис. 4.39, б; дерево выделено сплошными линиями. Уравнения для главных контуров:

$$u_{L1} + u_{L3} - u_0 + u_{R1} = 0, \quad (4.6)$$

$$u_{L2} + u_{R2} - u_{L3} = 0. \quad (4.7)$$

Уравнения для главных сечений:

$$i_{L3} + i_{L2} - i_{L1} - i_0 = 0, \quad (4.8)$$

$$i_{R1} = i_{L1} \quad (4.9) \quad \text{и} \quad i_{R2} = i_{L2}. \quad (4.10)$$

Умножая (4.8) на L_3 и дифференцируя, получаем

$$L_3 \frac{di_{L3}}{dt} = L_3 \frac{di_{L1}}{dt} - L_3 \frac{di_{L2}}{dt} + L_3 \frac{di_0}{dt}.$$

Подставляя (4.8) в (4.6) и (4.7) и выполняя необходимые преобразования, приходим к искомым уравнениям состояния:

$$\frac{di_{L1}}{dt} = -\frac{R_1(L_2 + L_3)}{N} i_{L1} - \frac{R_2 L_3}{N} i_{L2} + \frac{L_2 + L_3}{N} u_0 - \frac{L_2 L_3}{N} \frac{di_0}{dt},$$

$$\frac{di_{L2}}{dt} = -\frac{L_3 R_1}{N} i_{L1} - \frac{R_2(L_1 + L_3)}{N} i_{L2} + \frac{L_3}{N} u_0 + \frac{L_1 L_3}{N} \frac{di_0}{dt},$$

$$N = L_1 L_2 + L_2 L_3 + L_3 L_1.$$

В уравнения состояния вошли слагаемые, содержащие производную от тока источника тока.

В вырожденных цепях (при наличии так называемых L -узлов) возможны разрывы непрерывности изменения токов индуктивных элементов, т. е. $i_{Lk}(0+) \neq i_{Lk}(0-)$.

Далее решаем задачу при заданных параметрах; воздействия от времени не зависят.

Начальные условия:

$$i_{L3}(0-) = I_0 = 2A, \quad i_{L1}(0-) = i_{L2}(0-) = 0.$$

Уравнения состояния:

$$\frac{di_{L1}}{dt} = -\frac{2}{3} i_{L1} - \frac{1}{3} i_{L2} + \frac{8}{3},$$

$$\frac{di_{L2}}{dt} = -\frac{1}{3} i_{L1} - \frac{2}{3} i_{L2} + 4/3.$$

Матрица системы

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Собственные числа матрицы определяются выражением

$$\begin{bmatrix} p+2/3 & 1/3 \\ 1/3 & p+2/3 \end{bmatrix} = p^2 + \frac{4}{3}p + \frac{1}{3} = 0,$$

откуда $p_1 = -\frac{1}{3}$ л/с, $p_2 = -1$ л/с.

Вынужденный режим определяем из уравнений состояния, полагая $\frac{di_{L1}}{dt} = \frac{di_{L2}}{dt} = 0$, так как воздействия от времени не зависят.

$$0 = -\frac{2}{3}i_{L1} - \frac{1}{3}i_{L2} + \frac{8}{3},$$

$$0 = -\frac{1}{3}i_{L1} - \frac{2}{3}i_{L2} + \frac{4}{3},$$

$$i_{L1} = 4 \text{ А}, \quad i_{L2} = 0, \quad i_{L3} = i_0 + i_{L1} - i_{L2} = 6 \text{ А}$$

(токи вынужденного режима можно получить по схеме после замыкания накоротко всех индуктивных элементов).

Начальные условия в момент $t=0+$ устанавливаем, исходя из непрерывности изменения суммарного потокосцепления в каждом из независимых контуров и уравнения токов для L -узла:

$$L_1 i_{L1}(0+) + L_3 i_{L3}(0+) = L_1 i_{L1}(0-) + L_3 i_{L3}(0-),$$

$$L_2 i_{L2}(0+) + L_3 i_{L3}(0+) = L_2 i_{L2}(0-) - L_3 i_{L3}(0-),$$

$$i_{L1}(0+) - i_{L2}(0+) - i_{L3}(0+) = -I_0.$$

Решая систему уравнений, находим

$$i_{L1}(0+) = 0, \quad i_{L2}(0+) = 0, \quad i_{L3}(0+) = I_0 = 2 \text{ А}.$$

В данной задаче токи индуктивных элементов изменяются непрерывно.

Определяем ток

$$i_{L1} = i_{L1} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}; \quad i_{L1} = 4 \text{ А}; \quad i_{L1}(0+) = 0.$$

Значение $i'_{L1}(0+) = \frac{8}{3}$ А/с находим из первого уравнения состояния.

Для вычисления постоянных интегрирования решаем систему

$$\left. \begin{aligned} A_1 + A_2 &= i_{L1}(0+) - i_{L1b} = -4, \\ p_1 A_1 + p_2 A_2 &= i'_{L1}(0+) = 8/3. \end{aligned} \right\}$$

$$A_1 = -2; \quad A_2 = -2; \quad i_{L1} = 4 - 2e^{-\frac{1}{3}t} - 2e^{-t}.$$

Аналогично можно получить

$$i_{L2} = 2e^{-\frac{1}{3}t} - 2e^{-t}; \quad i_{L3} = 6 - 4e^{-\frac{1}{3}t}.$$

4.42. За переменные состояния принять u_{C1} и u_{C2} ; обратить внимание на то, что частоты собственных колебаний цепи будут определяться неполным квадратным уравнением вида $p^2 + ap = 0$.

4.43. В цепи есть контур, составленный из одних индуктивных элементов. Это приводит к тому, что из трех частот собственных колебаний одна будет иметь нулевое значение.

4.44. В цепи имеется С-контур, поэтому в качестве переменных состояния следует принимать напряжения двух любых емкостных элементов.

4.45. Предварительно необходимо решить задачу 4.44м.

ГЛАВА 5

ПЕРЕХОДНАЯ И ИМПУЛЬСНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКИ. ИНТЕГРАЛЫ НАЛОЖЕНИЯ

В задачах этой главы использованы следующие обозначения:

$$\delta_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \text{ — единичная ступенчатая функция;}$$

$$\delta_1(t - \tau) = \begin{cases} 0 & t < \tau \\ 1 & t > \tau \end{cases} \text{ — единичная ступенчатая функция, смещенная вправо на время } \tau;$$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases} \text{ — единичная импульсная функция;}$$

$$\delta_2(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t & t > 0 \end{cases} \text{ — функция единичного наклона;}$$

$h_1(t)$ — переходная характеристика цепи (функция, численно равная реакции цепи на единичное ступенчатое воздействие);

$h(t)$ — импульсная характеристика цепи (функция, численно равная реакции цепи на единичное импульсное воздействие);

$h_2(t)$ — функция, численно равная реакции цепи на воздействие в виде единичного наклона.

Во всех задачах начальные условия предполагаются нулевыми.

5.1м. Построить графики функций, заданных выражениями:
 e^{-2t} ; $e^{-2t} \delta_1(t)$; $e^{-2(t-0,5)}$; $e^{-2t} \delta_1(t-0,5)$; $e^{-2(t-0,5)} \delta_1(t-0,5)$;
 $2t$; $2(t-1)$; $2(t-1) \delta_1(t)$; $2(t-1) \delta_1(t-1)$; $2\delta_2(t)$; $2\delta_2(t-1)$.

5.2м. Переходная характеристика некоторой цепи имеет вид

$$h_1(t) = 2e^{-t} \delta_1(t).$$

Определить реакцию цепи на воздействия, показанные на графиках рис. 5.2, а—в.

Построить график реакции на воздействие (рис. 5.2, а).

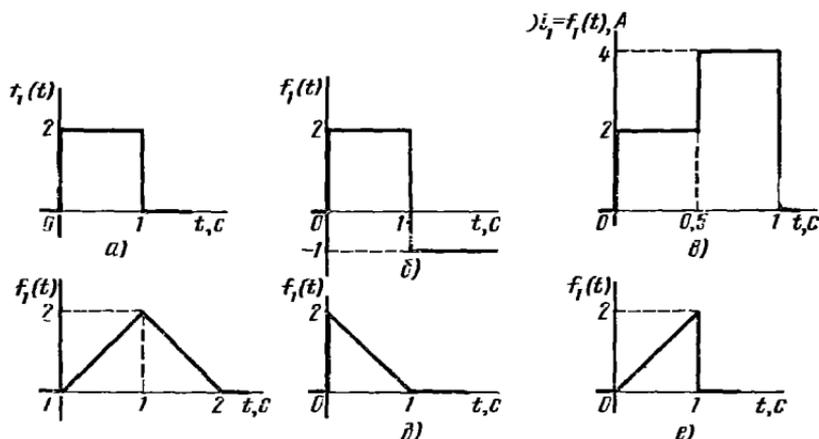


Рис. 5.2

5.3р. Известна переходная характеристика некоторой цепи

$$h_1(t) = (2 - e^{-t}) \delta_1(t).$$

Определить реакцию цепи на воздействия, показанные на рис. 5.2, г—е. Построить график реакции на воздействие (рис. 5.2, г).

5.4м. Определить входную реакцию последовательного RL -контура при воздействии с момента $t=0$ напряжения $u(t) = at$. Решить задачу для последовательного RC -контура. Распространить полученные результаты на дуальные цепи.

5.5. В последовательном контуре $R=2$ Ом, $L=1$ Гн с момента $t=0$ действует напряжение:

а) $u(t) = U_0 e^{-at} = 4e^{-4t}$;

б) $u(t) = U_0(1 - e^{-at}) = 4 - 4e^{-4t}$.

Определить для каждого воздействия ток цепи, используя интегралы наложения по переходной и импульсной характеристикам. Решить задачу, заменив индуктивный элемент на элемент $C=0,25$ Ф.

5.6. Используя переходную характеристику для входного напряжения параллельного контура ($R=2$ Ом, $L=1$ Гн), определить ре-

акцию при действии тока, указанного на графике (рис. 5.2, в). Построить график реакции.

5.7р. В цепи (рис. 5.7, а) $R_1=R_2=2$ Ом, $L=0,5$ Гн. С момента $t=0$ на входе цепи действует напряжение $u_1(t)=4e^{-2t}$.

Используя интегралы наложения по переходной и импульсной характеристикам, определить выходное напряжение $u_2(t)$.

Решить задачу, заменив L -элемент емкостным с $C=0,5$ Ф.

5.8м. Решить задачу 5.7 при условии, что на входе цепи действует напряжение (рис. 5.7, б).

5.9. Структура цепи задана тройками чисел: 1, 3, 1; 2, 1, 3; 3, 1, 2; 4, 1, 2 и 5, 2, 3. Содержание ветвей: 1 — источник тока $i(t)=2e^{-3t}\delta_1(t)$; 2 — $R_1=0,5$ Ом; 3 — $R_2=1$ Ом; 4 — $L=1$ Гн; 5 — $R_3=0,5$ Ом.

Определить переходную и импульсную характеристики цепи для напряжения на сопротивлении R_3 . Используя интегралы наложения по переходной и импульсной характеристикам, определить u_{R3} при заданном воздействии.

5.10р. Структура цепи задана тройками чисел: 1, 3, 1; 2, 1, 2; 3, 1, 3; 4, 2, 3; 5, 2, 3. Содержание ветвей: 1 — последовательно источник напряжения $u(t)$ и $R_1=6$ Ом; 2 — $R_2=3$ Ом; 3 — $R_3=6$ Ом; 4 — $R_4=3$ Ом; 5 — $C=0,25$ Ф. Найти импульсную характеристику цепи для реакции i_{R3} , не определяя переходной характеристики. Определить i_3 при $u(t)=36(1+e^{-t})\delta_1(t)$.

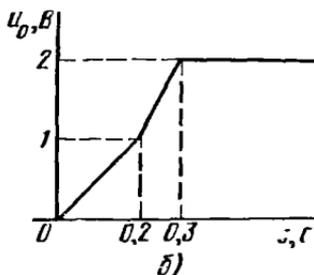
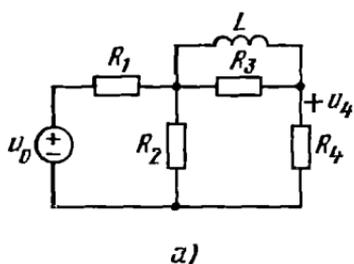


Рис. 5.12

5.11. В условиях задачи 5.10 заменить емкостный элемент на индуктивный $L=1$ Гн. Определить импульсную характеристику для входной реакции (без определения переходной). Вычислить входную реакцию при $u(t)=18e^{-2t}\delta_1(t)$.

5.12. На цепь (рис. 5.12, а) с момента $t=0$ действует источник напряжения $u_0(t)$; $R_1=R_2=R_3=2$ Ом; $R_4=1$ Ом; $L=0,25$ Гн.

Используя переходную и импульсную характеристики, определить $u_4(t)$ при $u_0(t)=2e^{-2t}\delta_1(t)$.

Используя характеристику $h_2(t)$, определить $u_4(t)$ при воздействии, заданном графически — рис. 5.12, б.

5.13. Структура цепи задана тройками чисел: 1, 3, 1; 2, 1, 3; 3, 1, 2; 4, 2, 3; 5, 2, 3. Содержание ветвей: 1 — источник тока $i_0(t)$; 2 — $R_1=0,5$ Ом; 3 — $R_2=0,5$ Ом; 4 — последовательно $R_3=0,5$ Ом и $C=0,25$ Ф; 5 — $R_4=1$ Ом.

Используя переходную и импульсную характеристики, определить $i_4(t)$ при $i_0=2-2e^{-2t}$.

Используя характеристику цепи $h_2(t)$, определить $i_4(t)$ при $i_0(t)$, заданном графически на рис. 5.13.

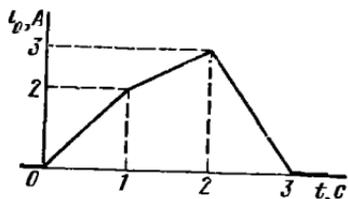


Рис. 5.13

5.14. В последовательном колебательном контуре $L=1$ Гн $C=0,05$ Ф; резистивный элемент может принимать два значения: $R_a=12$ Ом и $R_b=4$ Ом. Получить выражения переходной и импульсной характеристик тока цепи для случаев a и b при воздействии на входе источника напряжения.

Определить выражения реакции при действии на входе прямоугольного импульса напряжения уровня $U=10$ В, длительность которого равна: 1) $t_n=\pi/8$ с; 2) $t_n=\pi/4$ с.

5.15. На идеальный колебательный контур с параметрами L и C с момента $t=0$ действует прямоугольный импульс напряжения уровня U длительностью t_n . При каком значении t_n напряжение u_C в любой момент времени $t > t_n$ будет равно нулю?

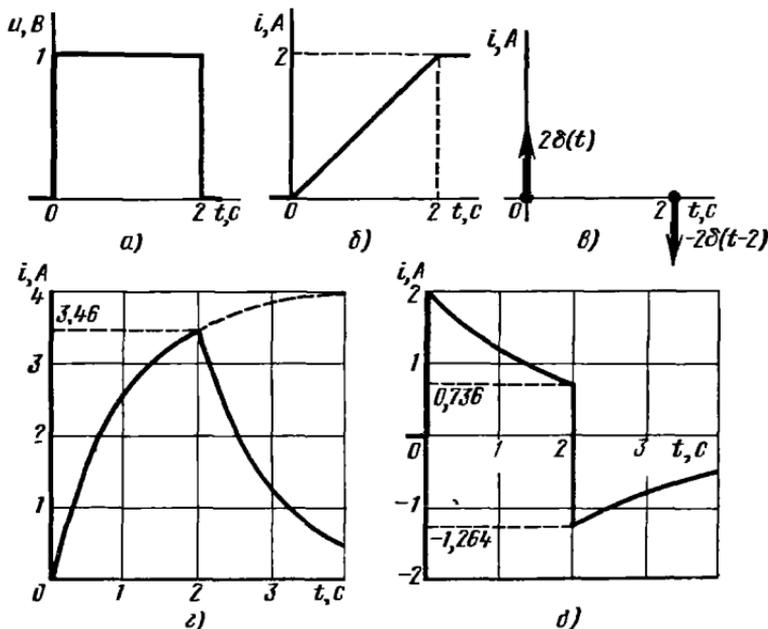


Рис. 5.17

5.16. На воздействие $f_1(t) = 2\delta_1(t)$ реакция некоторой цепи определяется выражением $f_2(t) = (2 - 3e^{-t} + e^{-3t})\delta_1(t)$. Найти реакцию на воздействие $f_{1a}(t) = 6t\delta_1(t)$.

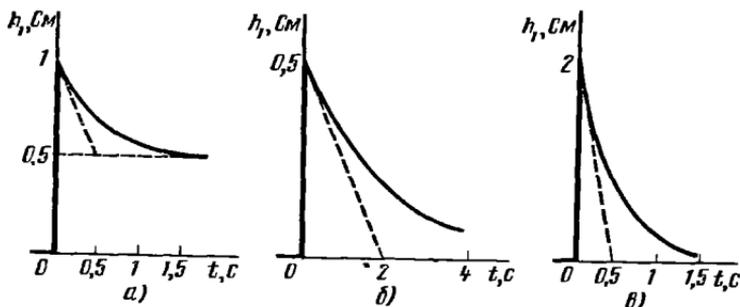


Рис. 5.18

5.17. На вход четырех двухполюсных цепей первого порядка без запаса энергии подается прямоугольный импульс напряжения (рис. 5.17, а). На рис. 5.17, б—д даны графики входного тока двухполюсников. Найти возможные схемы двухполюсных цепей с минимальным числом элементов и определить параметры этих элементов.

5.18. Из двух резистивных элементов $R=1$ Ом и емкостного $C=1$ Ф собраны 3 схемы; на рис. 5.18 даны графики переходных характеристик для входного тока при воздействии источника напряжения. Найти схемы цепей, соответствующие приведенным характеристикам.

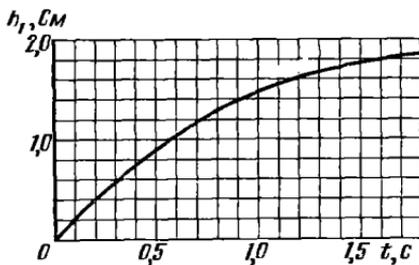


Рис. 5.19

5.19. На рис. 5.19 показан график переходной характеристики для входной реакции некоторой цепи второго порядка. Найти цепь

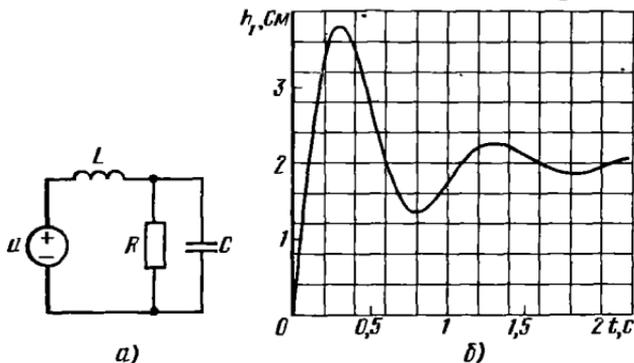


Рис. 5.20

первого порядка с минимальным числом элементов, для которой переходная характеристика будет приближенно совпадать с заданной. Определить параметры цепи и сопоставить графики обеих характеристик.

5.20. Переходная характеристика для входного тока цепи (рис. 5.20, а) представлена графиком на рис. 5.20, б. Определить параметры цепи.

РЕШЕНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

5.1. При построении графиков функций, содержащих множитель $\delta_1(t-t_1)$, следует иметь в виду, что они при $t < t_1$ равны нулю (так как $\delta_1(t-t_1) = 0$ при $t < t_1$ по определению).

5.2. Воздействия, заданные графически, представить в виде последовательности ступенчатых функций, запаздывающих друг относительно друга.

5.3. Решение выполняют для варианта воздействия, график ко-

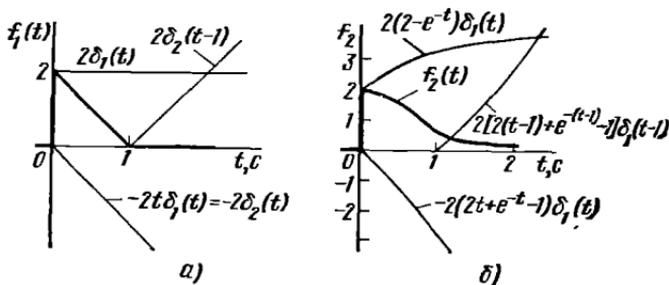


Рис. 5.3

торого изображен на рис. 5.2, д. Воздействие представляем в виде последовательности элементарных функций (рис. 5.3, а)

$$\begin{aligned} f_1(t) &= 2\delta_1(t) - 2t\delta_1(t) + 2(t-1)\delta_1(t-1) = \\ &= 2\delta_1(t) - 2\delta_2(t) + 2\delta_2(t-1). \end{aligned}$$

Определяем характеристику цепи

$$h_2(t) = \int_0^t h_1(t) dt = \int_0^t (2 - e^{-t}) dt = 2t + e^{-t} - 1.$$

Используя характеристики $h_1(t)$ и $h_2(t)$, записываем реакцию цепи

$$\begin{aligned} f_2(t) &= 2(2 - e^{-t})\delta_1(t) - 2(2t + e^{-t} - 1)\delta_1(t) + \\ &+ 2[2(t-1) + e^{-(t-1)} - 1]\delta_1(t-1). \end{aligned}$$

График $f_2(t)$ показан на рис. 5.3, б.

5.4. При решении использовать характеристику $h_2(t)$.

5.7. Определяем переходную характеристику $h_1(t)$ для выходного напряжения $u_2(t)$.

Для отыскания $h_1(t)$ находим $u_2(t)$ при подключении цепи к источнику постоянного напряжения U .

Начальные условия в цепи нулевые, следовательно, $i_L(0+) = i_L(0-) = 0$ и L -элемент в момент времени $t=0$ можно представить в виде разомкнутой ветви, поэтому

$$u_2(0+) = \frac{U}{R_1 + R_2} R_2.$$

В вынужденном режиме $u_{2в} = 0$, так как при прохождении постоянного вынужденного тока L -элемент замкнут накоротко.

Принимая $U=1$, получим

$$h_1(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\delta t}, \quad \delta = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2) L}.$$

Численно $h_1(t) = 0,5e^{-2t}$.

Импульсная характеристика $h(t)$ связана с переходной соотношением $h(t) = \frac{dh_1(t)}{dt}$, причем производная берется с учетом возможного разрыва непрерывности переходной характеристики. В рассматриваемой задаче при $t=0$ $h_1(t)$ имеет разрыв от $h_1(0-) = 0$ до $h_1(0+) = 0,5$, поэтому $h(t) = 0,5\delta(t) - e^{-2t}$.

Определяем реакцию $u_2(t)$ на заданное воздействие $u_1(t) = 4e^{-2t}\delta_1(t)$, используя интегралы наложения.

1. Интеграл наложения по переходной характеристике (интеграл Дюамеля)

$$\begin{aligned} u_2(t) &= u_1(0)h_1(t) + \int_0^t u_1(\tau)h_1(t-\tau)d\tau = \\ &= 4 \cdot 0,5e^{-2t} + \int_0^t -8e^{-2\tau} \cdot 0,5e^{-2(t-\tau)}d\tau = \\ &= 2e^{-2t} - 4e^{-2t} \int_0^t e^{-2\tau}e^{2\tau}d\tau = 2e^{-2t} - 4te^{-2t}. \end{aligned}$$

2. Интеграл наложения по импульсной характеристике

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \int_0^t u_1(\tau)h(t-\tau)d\tau = \\ &= \int_0^t 4e^{-2\tau}[0,5\delta(t-\tau) - e^{-2(t-\tau)}]d\tau = \\ &= 2e^{-2t} - 4e^{-2t} \int_0^t e^{-2\tau}e^{2\tau}d\tau = 2e^{-2t} - 4te^{-2t}. \end{aligned}$$

Замечания: а) все операции при нахождении интегралов выполняются по переменной τ , поэтому множители, не зависящие от τ (в рассматриваемом примере e^{-2t}), выносятся за знак интеграла; б) при нахождении интегралов, содержащих в подынтегральном выражении импульсную функцию $\delta(t)$ или $\delta(t-\tau)$, необходимо учитывать, что произведение $f(\tau)\delta(t-\tau)$ равно нулю при $\tau \neq t$, а при $\tau=t$ оно равно $f(t)\delta(t-\tau)$. Поэтому $\int_0^{t+} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=f(t)$, так как интеграл от единичной импульсной функции равен единице. В рассматриваемом примере

$$\int_0^{t+} 4e^{-2\tau} \cdot 0,5\delta(t-\tau) d\tau = 2e^{-2t}.$$

5.8. Представить воздействие в виде последовательности функций наклона и использовать характеристику $h_2(t)$. Ознакомиться с решениями задач 5.3 и 5.7.

5.10. Изображаем схему цепи (рис. 5.10, а). Для определения импульсной характеристики включаем на вход источник напряже-

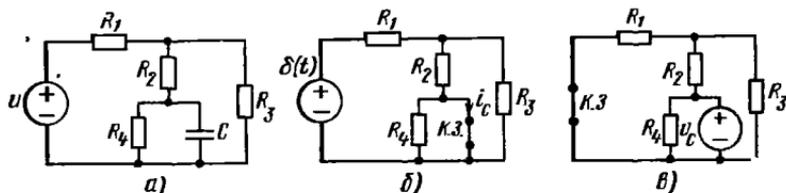


Рис. 5.10

ния $u(t)=\delta(t)$ и замыкаем накоротко C -элемент, так как начальные условия — нулевые (рис. 5.10, б). Определяем токи емкостного элемента и через R_3 в момент $t=0$

$$i_C(0) = \frac{\delta(t)}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3} = \frac{1}{12} \delta(t); \quad i_3(0) = \frac{1}{24} \delta(t).$$

За время действия импульса тока напряжение C -элемента изменится от 0 до $u_C(0)$:

$$u_C(0) = \frac{1}{C} \int_0^{0+} i_C(0) dt = \frac{1}{0,25} \int_0^{0+} \frac{1}{12} \delta(t) dt = \frac{1}{3} \text{ В.}$$

При $t>0$ в цепи будет происходить свободный процесс за счет энергии C -элемента, накопленной во время действия импульса. (рис. 5.10, в).

$$i_3(0+) = \frac{u_C(0+)}{R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_3} = \frac{1}{36} \text{ А}; \quad \delta = \frac{1}{R_3 C},$$

где

$$R_9 = \frac{R_4 \left(R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} \right)}{R_4 + R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}} = 2 \text{ Ом}, \quad \delta = 21' \text{ с.}$$

В свободном режиме

$$i_{3\text{св}} = i_3(0+) e^{-\delta t} = \frac{1}{36} e^{-2t}.$$

Импульсная характеристика численно равна найденному выражению тока i_3 :

$$h(t) = \frac{1}{24} \delta(t) + \frac{1}{36} e^{-2t}.$$

Определяем реакцию на заданное воздействие

$$\begin{aligned} i_3(t) &= \int_0^{t+} u(t-\tau) h(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^{t+} 36 [1 + e^{-(t-\tau)}] \left[\frac{1}{24} \delta(\tau) + \frac{1}{36} e^{-2\tau} \right] d\tau; \end{aligned}$$

после преобразований получаем

$$i_3 = 2 + 2,5 e^{-t} - 1,5 e^{-2t}.$$

ГЛАВА 6

АНАЛИЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ В РЕЖИМЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

6.1р. Уравнение равновесия токов в узле некоторой электрической цепи имеет вид $i = i_1 + i_2$, где $i_1 = 3 \cos(1000t + 30^\circ)$, $i_2 = 4 \cos(1000t + 120^\circ)$. Методом комплексных амплитуд получить выражение i в виде одной синусоидальной* функции времени, построить графики $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i(t)$ и векторную диаграмму токов на комплексной плоскости. Определить период T , частоту f токов и угол фазного сдвига между токами i_1 и i_2 .

6.2. Уравнение напряжений в контуре некоторой электрической цепи имеет вид $u = u_1 + u_2 + u_3$; $u_1 = 5 \cos \omega t$, $u_2 = 10 \cos(\omega t + 30^\circ)$, $u_3 = 10 \cos(\omega t - 60^\circ)$. Получить выражение u в виде одной синусоидальной функции времени, построить векторную диаграмму напряжений на комплексной плоскости.

* В задачке принята косинусная форма записи синусоидальных функций времени.

6.3м. По заданным комплексным амплитудам записать напряжение в виде косинусоидальных функций $u_k = U_{km} \cos(\omega t + \alpha_k)$ при $\omega = 5000$ рад/с:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{1m} &= 3 + j4; & \dot{U}_{2m} &= -3 - j4; & \dot{U}_{3m} &= -3 + j4; & \dot{U}_{4m} &= 3 - j4; \\ \dot{U}_{5m} &= 5; & \dot{U}_{6m} &= j5; & \dot{U}_{7m} &= -j5; & \dot{U}_{8m} &= -5. \end{aligned}$$

6.4. На участке цепи $u = u_1 + u_2$; напряжения u_1 и u_2 изменяются по синусоидальному закону с одинаковой частотой: $u_1 = 30 \cos(\omega t + \pi/4)$; $U_{2m} = 40$ В. Записать в косинусоидальной форме u_2 для случаев: а) u_1 и u_2 совпадают по фазе; б) u_1 и u_2 находятся в противофазе; в) u_1 опережает u_2 по фазе на $\pi/4$; г) u_1 отстает от u_2 по фазе на $\pi/2$. Для всех случаев получить выражения u методом комплексных амплитуд, построить графики и векторные диаграммы напряжений.

6.5р. На входе цепи (рис. 6.5, а) действует источник синусоидального напряжения $u = 180 \cos(\omega t - 37^\circ)$, частота источника $f =$

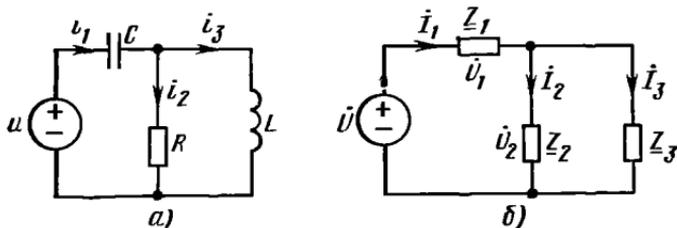


Рис. 6.5

$= 50$ Гц, $R = 10$ Ом, $L = 31,8$ мГн, $C = 318$ мкФ. Определить: а) параметры комплексной схемы замещения цепи (рис. 6.5, б) \dot{U} , \underline{Z}_1 , \underline{Z}_2 , \underline{Z}_3 ; б) полное сопротивление цепи $|Z|$ (модуль комплексного сопротивления) и угол фазного сдвига φ на входе цепи.

6.6. При некоторой частоте f сопротивления элементов последовательного RLC-контура равны: $R = 20$ Ом, $X_L = \omega L = 60$ Ом, $X_C = 1/\omega C = 40$ Ом. Записать выражение комплексного сопротивления цепи, определить величину полного сопротивления и угла фазного сдвига. Решить задачу при частоте $f_1 = 0,5f$.

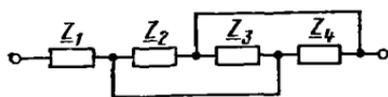


Рис. 6.8

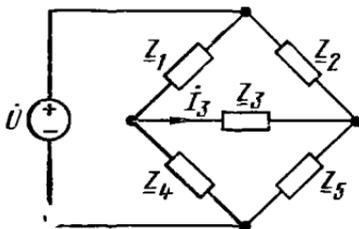


Рис. 6.9

6.7. Для цепи с последовательным соединением резистивного и емкостного элементов определить величины активной g и реактивной b проводимостей; $R=6$ Ом, $C=16,6$ мкФ, $f=12$ кГц.

6.8. Определить комплексное сопротивление двухполюсника (рис. 6.8), если $\underline{Z}_1=j$; $\underline{Z}_2=-j2$; $\underline{Z}_3=2$; $\underline{Z}_4=1+j$.

6.9м. Определить входное сопротивление цепи (рис. 6.9), если $\underline{Z}_1=1$; $\underline{Z}_2=j$; $\underline{Z}_3=-j$; $\underline{Z}_4=j$; $\underline{Z}_5=1$. Найти I_3 при $U=20$.

6.10м. В цепи (рис. 6.10) — синусоидальный режим; действующие значения напряжений элементов указаны на схеме. Определить напряжения U_{12} , U_{23} , U_{24} , U_{14} , U .

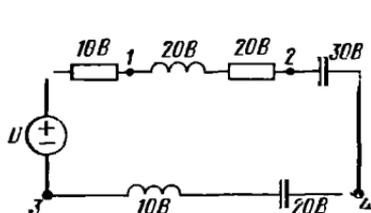


Рис. 6.10

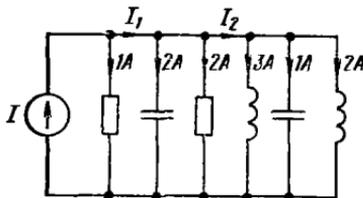


Рис. 6.11

6.11м. В цепи (рис. 6.11) — синусоидальный режим; действующие значения токов ветвей указаны на схеме. Определить токи I_1 , I_2 , I .

6.12. К цепи с последовательным соединением резистивного и индуктивного элементов подключен источник синусоидального тока. При частоте f_1 источника $U_R=U_L$: а) как изменится величина напряжения на входе цепи, если частота источника будет $2f_1$ (действующее значение тока источника принять не зависящим от частоты); б) рассмотреть дуальный вариант задачи. Для дуальной цепи оценить изменение тока на входе цепи при уменьшении частоты источника напряжения в два раза.

6.13м. К последовательному RLC -контур приложено синусоидальное напряжение с действующим значением $U=50$ В, при этом $U_R=30$ В, $U_L=60$ В. Определить U_C .

6.14р. Дана цепь (рис. 6.14а): $L_1=2$ мГн, $L_2=5$ мГн, $R_3=4$ Ом, $C_4=333$ мкФ, $i_3=3\sqrt{2}\cos(1000t-90^\circ)$. Определить параметры комплексной схемы замещения цепи (см. рис. 6.14б), действующие значения напряжений и токов, а также полную S , активную P и реактивную Q мощности. Записать уравнения мгновенных значений токов и напряжений. Построить векторную диаграмму по результатам анализа цепи и качественно. Изобразить схему дуальной цепи.

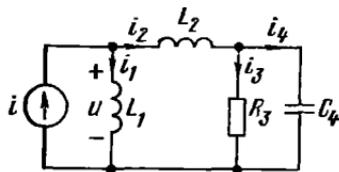


Рис. 6.14а

6.15. Дана цепь (рис. 6.15, а): $C_1=500$ мкФ, $C_2=250$ мкФ, $R_3=1$ Ом, $L_4=2$ мГ, $u=10\sqrt{2}\cos 1000t$. Определить параметры комплексной схемы замещения цепи (рис. 6.15, б), действующие и мгновенные

венные значения токов и напряжений, мощности S , P и Q . Построить качественно векторную диаграмму токов и напряжений.

6.16м. В цепи (см. рис. 6.14б) $\underline{Z}_1 = -j4$; $\underline{Z}_2 = j2$; $\underline{Z}_3 = j4$; $\underline{Z}_4 = 2$. Определить $\underline{Z}_{\text{вх}} = \dot{U}/\dot{I}$ и $H_I = I_4/I$. Найти U и I_4 при $I = 2$ А, а также величину угла фазового сдвига между токами I_4 и I . По заданным величинам Z_h изобразить схему цепи с элементами R , L , C и по-

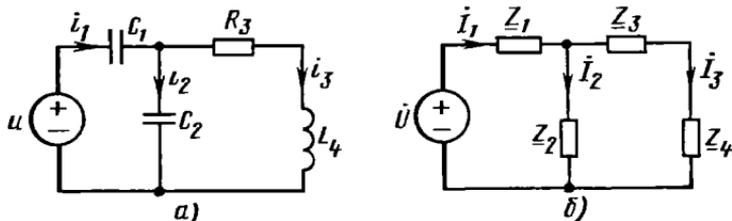


Рис. 6.15

строить качественно векторную диаграмму токов и напряжений.

6.17м. В лестничной цепи (рис. 6.17) $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_4 = 1 - j$; $\underline{Z}_2 = -j$; $\underline{Z}_3 = j$; $\underline{Z}_5 = 0,5 + j$; $\underline{Z}_6 = 0,5$. Определить: $\underline{Y}_{\text{вх}} = \dot{I}_1/\dot{U}$ и $\underline{Y}_{51} = \dot{I}_5/\dot{U}$. Найти токи I_1 и I_5 при $u = 8 \cos(\omega t + 30^\circ)$. Записать выражения i_1 и i_5 .

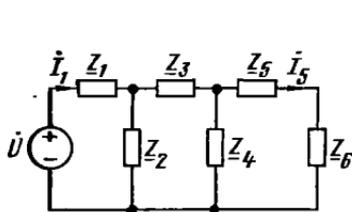


Рис. 6.17

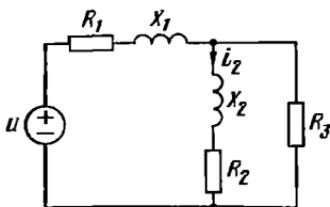


Рис. 6.18

6.18м. Дана цепь (рис. 6.18). При каком соотношении между сопротивлениями цепи ток i_2 будет сдвинут по фазе относительно приложенного напряжения на угол $\pi/2$? По полученному соотношению определить величину R_2 , если $R_1 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $X_1 = X_2 = 6$ Ом. Изобразить дуальную цепь.

6.19. Дана цепь (см. рис. 6.5, б): $\underline{Z}_1 = -jX_C$, $\underline{Z}_3 = jX_L$, $\underline{Z}_2 = R$. При каком соотношении между сопротивлениями X_C и X_L ток I_2 не будет зависеть от R . Решить задачу для дуальной цепи.

6.20. В цепи (рис. 6.20) $X_L = \omega L = 2$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 1$ Ом.

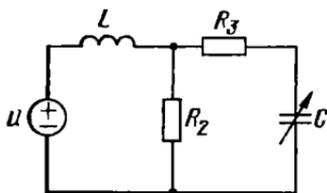


Рис. 6.20

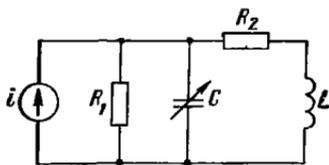


Рис. 6.21

Определить, при каком $X_C=1/\omega C$ мощность, потребляемая резисторами, будет максимальной. Вычислить значение этой мощности.

6.21. Дана цепь (рис. 6.21): $i=I_m \cos 10t$, $R_1=2$ Ом, $R_2=1$ Ом, $L=0,1$ Гн. Определить закон изменения вещественной и мнимой составляющей входного сопротивления при изменении C от 0 до ∞ . Построить графики $r=f_1(C)$ и $x=f_2(C)$.

6.22. К входу последовательного RLC -контура приложено синусоидальное напряжение U . Построить график зависимости угла фазового сдвига между напряжением емкостного элемента U_C и напряжением на входе цепи U при изменении R от 0 до ∞ . Принять $X_L=\omega L=2$ Ом, $X_C=1/\omega C=1$ Ом.

6.23. Для цепи (рис. 6.23) показать, что при изменении R_1 от 0 до ∞ действующее значение напряжения U_2 остается неизменным,

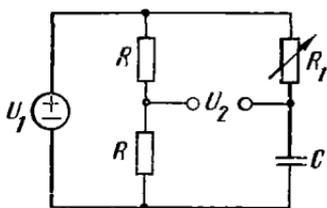


Рис. 6.23

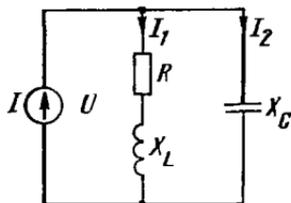


Рис. 6.25

а угол фазового сдвига между U_1 и U_2 изменяется от 0 до 180° .

6.24м. Цепь (см. рис. 6.5) находится в состоянии резонанса: $U=40$ В, $U_C=30$ В, $U_L=50$ В. Мощность, потребляемая цепью, $P=200$ Вт. Определить: R , X_L , X_C .

6.25. Цепь (рис. 6.25) находится в состоянии резонанса. Мощность, потребляемая цепью, $P=80$ Вт, $I=4$ А, $I_1=5$ А. Определить R , X_L , X_C .

6.26м. В цепи (рис. 6.25) $U=100$ В, $I=I_1=I_2=10$ А. Определить X_L , X_C , R .

6.27. Определить параметры последовательного и параллельного RLC -контуров по следующим данным: а) резонансная частота $f_0=10^6$ Гц, ширина резонансной кривой $\Delta f_0=10^4$ Гц, емкость $C=100$ пФ; б) резонансная частота $f_0=10^6$ Гц, добротность $Q=125$, характеристическое сопротивление $\rho=10^3$ Ом.

6.28. Последовательный колебательный RLC -контур ($L=10^{-5}$ Гн, $R=20$ Ом) должен настраиваться в резонанс в диапазоне частот $f_0=10^6 \div 5 \cdot 10^6$ Гц. Определить, в каких пределах будет изменяться емкость C -элемента, а также добротность контура и ширина полосы пропускания.

6.29. Для цепи, граф которой показан на рис. 6.29, известны матрицы сопротивлений контурных токов и напряжений контуров:

$$[\underline{Z}] = \begin{bmatrix} 2+j & -j & -1 \\ -j & 1 & j \\ -1 & j & 1 \end{bmatrix}; \quad [\underline{U}] = \begin{bmatrix} 10 \\ j10 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Определить: 1) сопротивления ветвей цепи и составить ее схему, включив в ветви соответствующие двухполюсники; 2) токи ветвей методом контурных токов и узловых напряжений; 3) передаточные проводимости короткого замыкания

$$\underline{Y}_{31} = \dot{I}_3 / \dot{U}_1; \quad \underline{Y}_{32} = \dot{I}_3 / \dot{U}_2.$$

6.30. В цепи (рис. 6.30) синусоидальный режим: $U_{01} \mp U_{03} = 5$ В, $U_{02} = 14,1$ В; U_{03} отстает от U_{01} на 90° , а U_{02} опережает U_{01} на 45° , $\underline{Z}_1 = j$, $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_5 = 1 - j$, $\underline{Z}_3 = -j 0,5$, $\underline{Z}_4 = 1$. Определить токи ветвей методами контурных токов и узловых напряжений.

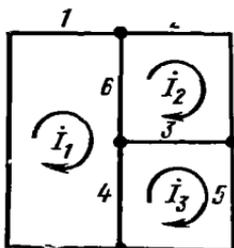


Рис. 6.29

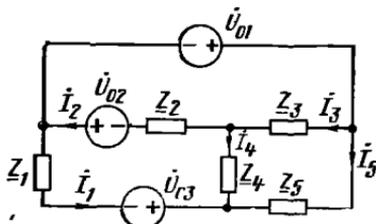


Рис. 6.30

6.31м. Для цепи (рис. 6.30) определить токи и напряжения всех ветвей цепи методом токов хорд.

6.32. В цепи (рис. 6.32) синусоидальный режим: $U_{01} = 4$ В, $U_{02} = 3$ В (совпадают по фазе). Сопротивления двухполюсников

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_3 = 1 + j, \quad \underline{Z}_2 = \underline{Z}_4 = 1 - j, \quad \underline{Z}_5 = j, \quad \underline{Z}_6 = \underline{Z}_7 = -j.$$

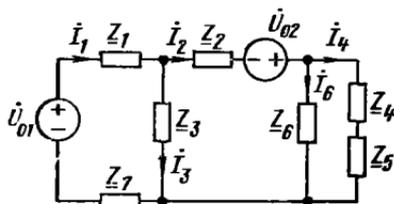


Рис. 6.32

Определить: 1) токи ветвей — методом контурных токов и узловых напряжений; 2) ток I_2 методом эквивалентного источника напряжения; 3) ток I_3 методом эквивалентного источника тока.

6.33м. Определить токи и напряжения ветвей цепи (рис. 6.32) методом напряжений ветвей дерева.

6.34. В цепи (рис. 6.34): $U_{01} = 10$, $U_{02} = -j10$, $U_{03} = j10$, $\underline{Z}_1 = 5$, $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_5 = 5 + j10$, $\underline{Z}_3 = 2,5 - j2,5$, $\underline{Z}_4 = -j5$.

Определить: 1) токи ветвей методом узловых напряжений; 2) ток I_3 методом эквивалентного источника.

6.35. В цепи (рис. 6.35): $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_3 = j$, $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_4 = 1$, $U_{01} = U_{02} = 2$ В, U_{02} опережает U_{01} по фазе на $\pi/2$. Определить I_2 методом эквивалентного источника.

6.36р. В цепи (см. рис. 6.21): $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 0,5$ Ом, $C = 2$ Ф, $L = 1$ Гн. Определить вынужденную составляющую напряжения u на входе цепи при воздействии с момента времени $t = 0$ на цепь ис-

точника тока i для трех случаев: 1) $i=6$ А; 2) $i=e^{-t}$; 3) $i=4e^{-2t} \cos(2t+60^\circ)$.

6.37. В цепи (см. рис. 6.20): $R_2=R_3=1$ Ом, $C=1$ Ф, $L=0,2$ Гн. Определить вынужденную составляющую напряжения u_C и построить график для двух случаев: 1) $u=2e^{-2t}$; 2) $u=20e^{-t} \times \times \cos(10t+30^\circ)$.

6.38. В трехфазной цепи, соединенной звездой без нейтрального провода, $\underline{Z}_a=\underline{Z}_b=\underline{Z}_c=\underline{Z}_\phi=20e^{-j60^\circ}$; $U_{л}=100\sqrt{3}$ В.

Определить токи цепи и потребляемую мощность. Построить векторную диаграмму.

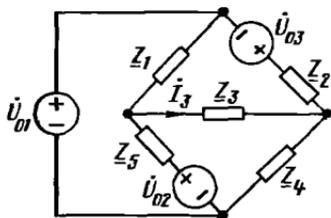


Рис. 6.34

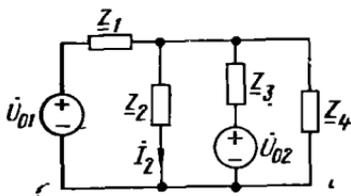


Рис. 6.35

6.39. Решить задачу 6.38 для режимов: 1) короткого замыкания фазы b ; 2) обрыва фазы b . Построить векторные диаграммы.

6.40р. В трехфазной цепи, соединенной звездой, $\underline{Z}_a=10e^{-j30^\circ}$, $\underline{Z}_b=j10$, $\underline{Z}_c=-j10$, $U_{л}=100\sqrt{3}$ В. Определить токи цепи и потребляемую мощность при: а) выключенном и б) включенном нейтральном проводе. Построить векторные диаграммы.

6.41. Решить задачу 6.40 для двух режимов: 1) обрыв фазы c при включенном и отключенном нейтральном проводе; 2) короткое замыкание фазы b при отсутствии нейтрального провода. Построить векторные диаграммы.

6.42. В трехфазной цепи, соединенной в звезду, $\underline{Z}_b=j10$, фаза c замкнута накоротко. Определить, при каком \underline{Z}_a ток фазы c будет равен нулю.

6.43. В трехфазной цепи, соединенной треугольником, $U_{л}=100$ В, $\underline{Z}_{ab}=\underline{Z}_{bc}=\underline{Z}_{ca}=\underline{Z}_\phi=20e^{j30^\circ}$.

Определить линейные и фазные токи цепи и потребляемую мощность. Построить векторную диаграмму.

6.44. Решить задачу 6.43 для режимов: 1) обрыва фазы bc ; 2) обрыва линейного провода a . Построить векторные диаграммы.

6.45. В трехфазной цепи, соединенной треугольником, $U_{л}=100$ В, $\underline{Z}_{ab}=10$, $\underline{Z}_{bc}=10e^{j60^\circ}$, $\underline{Z}_{ca}=10e^{-j60^\circ}$. Определить линейные и фазные токи системы и потребляемую мощность. Построить векторную диаграмму.

6.46. Решить задачу 6.45 для режимов: 1) обрыва фазы bc ; 2) обрыва линейного провода a . Построить векторные диаграммы.

6.47. В цепи (см. рис. 6.5, а) мощность источника изменяется по закону $p(t) = 80 + 40\sqrt{5} \cos(200t + \arctg \frac{1}{2})$; действующее значение тока в индуктивности $I_3 = 3$ А; $R = 5$ Ом. Определить U, L, C .

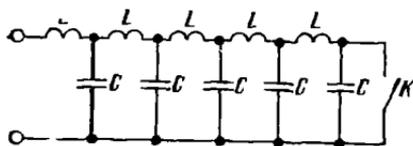


Рис. 6.49

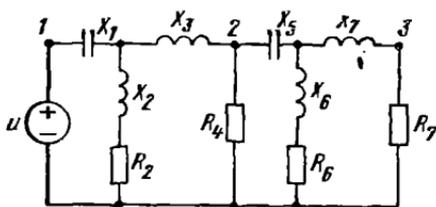


Рис. 6.50

6.48. Дана цепь (см. рис. 6.25). Известны действующие значения синусоидальных токов: $I_1 = 4$ А, $I_2 = 5$ А, $I_3 = 3$ А. Определить действующие значения этих токов, если индуктивность и резистор поменять местами.

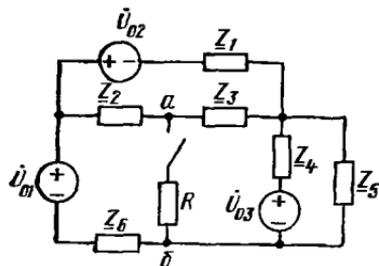


Рис. 6.53

6.49. В цепи (рис. 6.49) $L = 2$ мГ, $C = 20$ мкФ. Определить входное сопротивление цепи на частоте $\omega = 6 \cdot 10^3$ рад/с. Задачу решить при: а) замкнутом и б) разомкнутом ключе K .

6.50. В цепи (рис. 6.50) $U_{12} = U_{23} = 0$, $U_{R2} = 20$ В; во всех ветвях токи совпадают по фазе с приложенным к цепи напряжением. $R_2 = \omega L_2 = R_7 = 10$ Ом, $R_4 = 5$ Ом, $\omega L_3 =$

$= 2,5$ Ом. Определить действующие значения токов в ветвях цепи.

6.51. Из индуктивности, емкости и резистора составьте несколько таких двухполюсников, чтобы при $u = 10\sqrt{2} \cos(10^3t + 30^\circ)$ и действующем значении тока $I = 2$ А они потребляли бы максимальную активную мощность.

6.52. В цепи (см. рис. 6.5, б): $I_1 = I_2 = I_3$, $U_1 = U_2$, Z_1 — неизвестно, $Z_2 = R + j\omega L$, $Z_3 = 1/j\omega C$. Какие из приведенных значений может принимать U : а) $U = U_1$; б) $U = 1,5U_1$; в) $U = 2,5U_1$?

6.53. Дана цепь (рис. 6.53). При разомкнутом ключе напряжение $U_{a\delta} = U_1$, при замкнутом — $U_{a\delta} = U_2$. Доказать, что $U_1 \geq U_2$.

РЕШЕНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

6.1. Для заданных токов $i_1 = 3 \cos(1000t + 30^\circ)$ и $i_2 = 4 \cos(1000t + 120^\circ)$ комплексные амплитуды $I_{1m} = 3e^{j30^\circ} = 3 \cos 30^\circ + j3 \sin 30^\circ = 2,59 + j1,5$; $I_{2m} = 4e^{j120^\circ} = -2,00 + j3,46$. Следовательно, $I_m = I_{1m} + I_{2m} = 0,59 + j4,96 = 5e^{j83,12^\circ}$ и ток $i = 5 \cos(1000t + 83,12^\circ)$. Угловая частота $\omega = 2\pi/T = 2\pi f = 1000$ рад/с, откуда $T = 6,28 \cdot 10^{-3}$ с,

$f=1/T=159$ Гц; угол фазного сдвига токов $\alpha_1-\alpha_2=30^\circ-120^\circ=$
 $=-90^\circ$; ток i_1 отстает по фазе от i_2 на 90° .

6.3. Для нахождения амплитуд U_{km} и начальных фаз α_k по заданным комплексным амплитудам $\dot{U}_{km}=a+jb$ записываем последние в показательной форме $\dot{U}_{km}=U_{km}e^{j\alpha_k}$, где $U_{km}=|a+jb|=$
 $=\sqrt{a^2+b^2}$, $\alpha_k=\arg(a+jb)=\arctg \frac{b}{a}$.

При определении аргументов (начальных фаз напряжений в рассматриваемой задаче) при отсчете значения угла α_k следует выбирать квадрант с учетом знаков вещественной и мнимой части \dot{U}_{km} . Например, для $\dot{U}_{3m}=-3+j4=|3^2+4^2|e^{j\arctg \frac{4}{-3}}=5e^{j127^\circ}$
 угол $\alpha_3=127^\circ$ (второй квадрант).

6.5. Комплекс действующего значения напряжения источника $\dot{U}=\dot{U}_m/\sqrt{2}=127e^{-j37^\circ}$, комплексные сопротивления элементов цепи $\underline{Z}_2=\underline{Z}_R=R=10$; $\underline{Z}_3=\underline{Z}_L=j\omega L=j2\pi fL=j10$; $\underline{Z}_1=\underline{Z}_C=\frac{1}{j\omega C}=$
 $=\frac{1}{j2\pi fC}=-j10$. Комплексное сопротивление цепи $\underline{Z}=\underline{Z}_C+$
 $+\frac{\underline{Z}_R\underline{Z}_L}{\underline{Z}_R+\underline{Z}_L}=-j10+\frac{10\cdot j10}{10+j10}=5-j5=5\sqrt{2}e^{-j45^\circ}$. Откуда полное сопротивление цепи $|\underline{Z}|=5\sqrt{2}$ Ом; $\varphi=\arg \underline{Z}=-45^\circ$.

6.9. Целесообразно применить преобразование треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду (или звезды в треугольник).

6.10 и 6.11. Решение задачи начинают с построения векторной диаграммы. Для цепи с последовательным соединением элементов изображают на плоскости вектор тока, относительно него с учетом фазных сдвигов откладывают векторы напряжений элементов, затем геометрическим суммированием напряжений находят напряжения участков цепи. Для цепи с параллельным соединением строят вектор напряжения, относительно него откладывают векторы токов элементов, затем находят искомые токи.

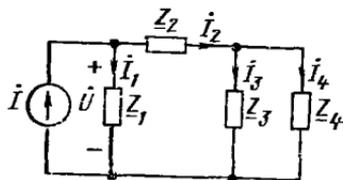


Рис. 6.146

6.13. Предварительно строят векторную диаграмму. Возможны два решения задачи.

6.14. На рис. 6.146 приведена комплексная схема замещения данной цепи, где $\underline{Z}_1=j\omega L_1=j2$; $\underline{Z}_2=j\omega L_2=j5$; $\underline{Z}_3=R_3=4$; $\underline{Z}_4=$
 $=-j\frac{1}{\omega C_4}=-j3$; $\dot{I}_3=3e^{-j90^\circ}=-j3$. Так как $\dot{U}_3=\dot{U}_4=\underline{Z}_3\dot{I}_3=-j12$,
 то $\dot{I}_4=\dot{U}_4/\underline{Z}_4=-j12/-j3=4$. Используя первый и второй законы Кирхгофа, последовательно определяем: $\dot{I}_2=\dot{I}_3+\dot{I}_4=4-j3=5e^{-j37^\circ}$;
 $\dot{U}_2=\underline{Z}_2\dot{I}_2=j5(4-j3)=15+j20=25e^{j53^\circ}$; $\dot{U}=\dot{U}_2+\dot{U}_3=15+j8=17e^{j28^\circ}$;

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_1} = \frac{15 + j8}{j2} = 4 - j7,5 = 8,5 e^{-j62^\circ};$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 8 - j10,5 = 13,24 e^{-j52,5^\circ}.$$

По найденным комплексным значениям токов в ветвях определяем их действующие и мгновенные значения:

$$I = 13,24 \text{ A}; \quad i = 13,24 \sqrt{2} \cos(1000t - 52,5^\circ);$$

$$I_1 = 8,5 \text{ A}; \quad i_1 = 8,5 \sqrt{2} \cos(1000t - 62^\circ);$$

$$I_2 = 5 \text{ A}; \quad i_2 = 5 \sqrt{2} \cos(1000t - 37^\circ);$$

$$I_4 = 4 \text{ A}; \quad i_4 = 4 \sqrt{2} \cos 1000t.$$

Аналогично определяют действующие и мгновенные значения напряжений.

Для вычисления мощностей воспользуемся найденными комплексными значениями \dot{U} и \dot{I} : $S = \dot{U}\dot{I}^* = (15 + j8)(8 + j10,5) = 36 + j221,5$. Следовательно, $P = 36$ Вт; $Q = 221,5$ вар; $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 224,4$ В·А.

Векторная диаграмма для найденных комплексных токов и напряжений изображена на рис. 6.14в. Дуальная цепь показана на рис. 6.15, а.

Построение качественной векторной диаграммы для цепи с последовательно-параллельным (цепочечным) соединением элементов начинают с вектора напряжения или тока элемента, наиболее удаленного от источника. Затем, применяя законы Кирхгофа, находят напряжения и токи элементов, расположенных ближе к входу цепи. Для каждого элемента по вектору напряжения (тока) строят вектор тока (напряжения) с учетом требуемых фазных сдвигов.

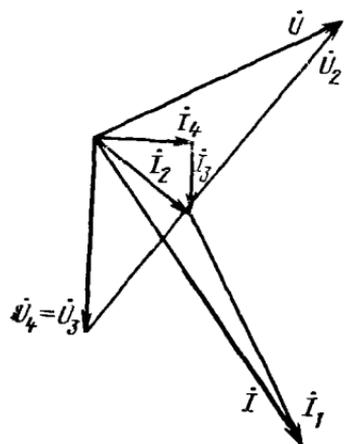


Рис. 6.14в

В рассматриваемом примере можно рекомендовать следующий порядок построения диаграммы: I_4 , $U_4 = U_3$, I_3 , $I_2 = I_3 + I_4$ (геометрическое суммирование), U_2 , $U_1 = U_2 + U_3$, I_1 , $I = I_1 + I_2$.

6.16 и 6.17. Для анализа цепи использовать метод пропорциональных величин.

6.18. Получить в общем виде выражение передаточной проводимости $Y_{21} = I_2/\dot{U}$ и определить соотношение между сопротивлениями цепи, при котором вещественная часть Y_{21} обратится в нуль.

6.24 и 6.26. Предварительно строят векторную диаграмму.

6.31. Познакомиться с решением задачи 3.29.

6.33. Познакомиться с решением задачи 3.30.

6.36. Определяют входное сопротивление цепи для комплексной частоты $s = \sigma + j\omega$; $Z(s) = 1/Y(s)$, где

$$Y(s) = G_1 + sC + \frac{1}{R_2 + sL}.$$

После подстановки численных значений получим

$$Z(s) = \frac{2s + 1}{4s^2 + 4s + 3}.$$

Комплексная амплитуда входного напряжения $\dot{U}_m = Z(s)I_m$. Численное решение приведем для воздействия $i = 4e^{-2t} \cos(2t + 60^\circ)$. В этом случае комплексная частота $s = -2 + j2$, а $I_m = 4e^{j60^\circ}$; сопротивление

$$Z(s)|_{s=-2+j2} = \frac{-3 + j4}{-5 - j24} = 0,204 e^{-j131^\circ 36'},$$

$$\dot{U}_m = 0,204 e^{-j131^\circ 36'} \cdot 4 e^{j160^\circ} = 0,816 e^{-j71^\circ 36'}.$$

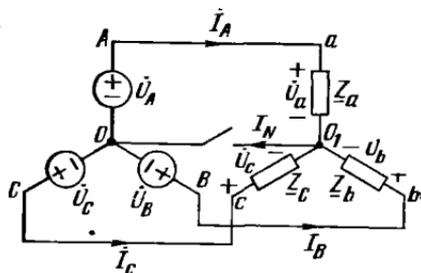


Рис. 6.40

Переходя от комплексной амплитуды к функции времени, получаем

$$u(t) = \operatorname{Re} \dot{U}_m e^{st} = 0,816 e^{-2t} \cos(2t - 71^\circ 36').$$

6.40. Трехфазная цепь приведена на рис. 6.40:

а) При выключенном нейтральном проводе

$$\dot{U}_N = \frac{\underline{Y}_a \dot{U}_A + \underline{Y}_b \dot{U}_B + \underline{Y}_c \dot{U}_C}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c} = -50 + j50\sqrt{3},$$

где

$$\dot{U}_A = 100, \quad \dot{U}_B = -50 - j50\sqrt{3}, \quad \dot{U}_C = -50 + j50\sqrt{3},$$

$$\underline{Y}_a = 1/\underline{Z}_a, \quad \underline{Y}_b = 1/\underline{Z}_b, \quad \underline{Y}_c = 1/\underline{Z}_c.$$

Фазные напряжения приемника:

$$\dot{U}_a = \dot{U}_A - \dot{U}_N = 150 - j50\sqrt{3},$$

$$\dot{U}_b = \dot{U}_B - \dot{U}_N = -j100\sqrt{3},$$

$$\dot{U}_c = \dot{U}_C - \dot{U}_N = 0.$$

Токи:

$$\dot{I}_a = \underline{Y}_a \dot{U}_a = 10\sqrt{3}, \quad I_a = 10\sqrt{3} \text{ А},$$

$$\dot{I}_B = \underline{Y}_b \dot{U}_b = 10\sqrt{3}, \quad I_B = 10\sqrt{3} \text{ А}, \quad I_C = 0.$$

Мощность, потребляемая приемником,

$$P = \operatorname{Re}(\dot{U}_a \dot{I}_A^* + \dot{U}_b \dot{I}_B^* + \dot{U}_c \dot{I}_C^*) = 1500 \sqrt{3} \text{ Вт.}$$

б) При включенном нейтральном проводе

$$\dot{U}_N = 0, \quad \dot{U}_a = \dot{U}_A, \quad \dot{U}_b = \dot{U}_B, \quad \dot{U}_c = \dot{U}_C.$$

Токи:

$$\dot{I}_A = \underline{Y}_a \dot{U}_a = 10 e^{j30^\circ}, \quad \dot{I}_B = \underline{Y}_b \dot{U}_b = 10 e^{-j210^\circ},$$

$$\dot{I}_C = \underline{Y}_c \dot{U}_c = 10 e^{j210^\circ}, \quad \dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = -5 \sqrt{3} + j5.$$

Следовательно,

$$I_A = I_B = I_C = I_N = 10 \text{ А.}$$

Мощность, потребляемая приемником,

$$P = \operatorname{Re}(\dot{U}_a \dot{I}_A^* + \dot{U}_b \dot{I}_B^* + \dot{U}_c \dot{I}_C^*) = 865 \text{ Вт.}$$

ГЛАВА 7

ФУНКЦИИ ЦЕПИ И ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ СИНУСОИДАЛЬНОМ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОМ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

7.1. Дана цепь (рис. 7.1): $R=1 \text{ Ом}$, $C=1 \text{ Ф}$.

1. Определить функции входной $Y_{11}(s)$ и передаточной $Y_{21}(s)$ проводимостей, входного $Z_{11}(s)$ и передаточного $Z_{21}(s)$ сопротивлений.

2. По найденным функциям записать дифференциальные уравнения, связывающие входной $i_1(t)$ и выходной $i_2(t)$ токи с входным напряжением $u_1(t)$.

3. Найти частоты собственных колебаний цепи.

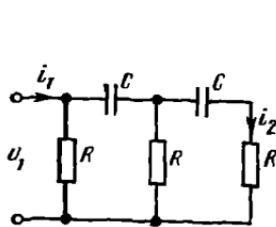


Рис. 7.1

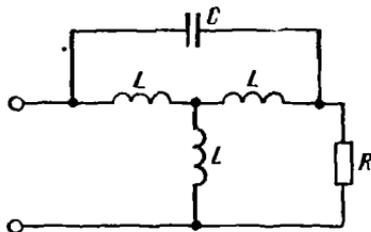


Рис. 7.2

7.2. Дана цепь (рис. 7.2): $L=0,5 \text{ Гн}$, $C=1 \text{ Ф}$, $R=1 \text{ Ом}$. Определить частоты собственных колебаний цепи, если к входным зажимам подключены источники: 1) напряжения; 2) тока. Предложите несколько способов решения каждой задачи и сравните их по трудоемкости.

7.3р. На рис. 7.3а дана картина расположения нулей и полюсов входного сопротивления некоторой цепи. Определить значения амплитудно- и фазо-частотной характеристик входного сопротивления для: $\omega=1$ рад/с, $\omega=2$ рад/с, $\omega \rightarrow \infty$, если $|Z_{вх}(0)|=1$ Ом.

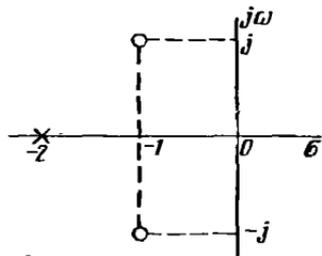


Рис. 7.3а

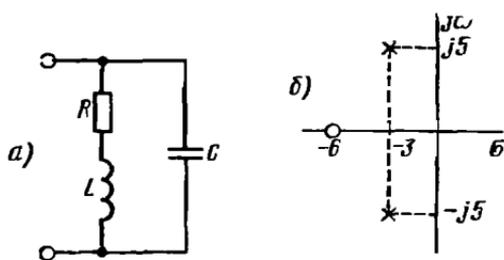


Рис. 7.4

7.4. Расположение нулей и полюсов входного сопротивления цепи (рис. 7.4, а) приведено на рис. 7.4, б. Определить R , L , C -параметры, если $|Z(0)|=3$ Ом.

7.5р. В схемах цепей (рис. 7.5) все $R=1$ Ом, $L=1$ Гн, $C=1$ Ф. Определить выражения входной проводимости $Y_{вх}(s)$ цепей и построить графики амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристик — $|Y_{вх}(j\omega)|$ и $\Psi(\omega) = \arg Y_{вх}(j\omega)$.

Выбрать из данных цепей оптимальную с точки зрения минимума среднеквадратичного отклонения амплитудно-частотной характеристики от 0,5 при $0 \leq \omega \leq 1$.

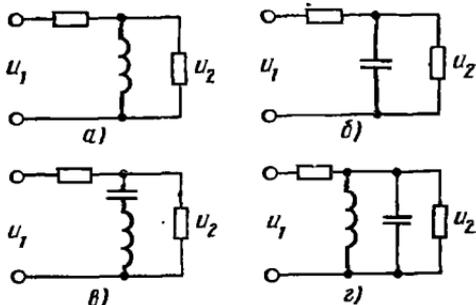


Рис. 7.5

7.6. Для цепей (рис. 7.5) получить выражения функций $H_U = \dot{U}_2 / \dot{U}_1$ и построить амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики.

7.7. Дана цепь (рис. 7.7): $L=1$ Гн, $C=0,25$ Ф, $R_1=1$ Ом, $R_2=4$ Ом. Определить функцию входного сопротивления и, используя картину расположения нулей и полюсов на плоскости комплексной частоты, построить:

1) амплитудно-частотную характеристику $|Z(j\omega)|$;

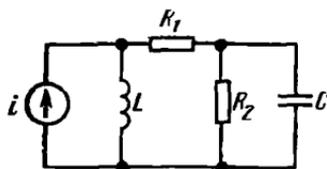


Рис. 7.7

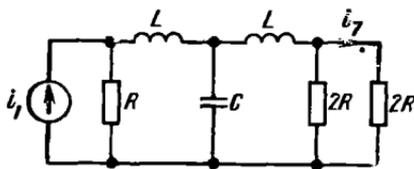


Рис. 7.8а

- 2) фазо-частотную характеристику $-\varphi(\omega)$;
- 3) вещественную частотную характеристику $-r(\omega)$;
- 4) мнимую частотную характеристику $x(\omega)$.

7.8р. Дана цепь (рис. 7.8а): $R=1$ кОм, $L=1$ мГ, $C=1000$ пФ. Определить функцию цепи $H_{71}(s) = I_7/I_1$. Построить амплитудно-частотную, фазо-частотную и амплитудно-фазовую характеристики полученной функции, осуществив предварительно нормировку характеристик по уровню и частоте.

Указание: для численных расчетов при построении частотных характеристик рекомендуется использовать схему Горнера.

7.9. Выполнить условия задачи 7.8р для цепи, изображенной на рис. 7.9. Принять $R=67$ кОм, $L=0,2$ Гн, $C=5$ пФ.

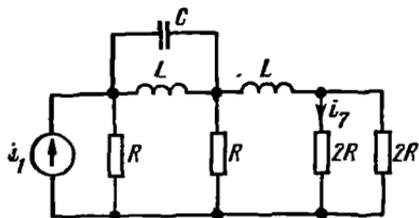


Рис. 7.9

7.10. Для электрических цепей (рис. 7.10) определить функции $H_U = U_2/U_1$ и их амплитудно-фазовые, амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики. Осуществив нормировку характеристик, построить их графики и найти полосу пропускания, если $L=4$ мГн, $C=250$ пФ, $R=50$ Ом.

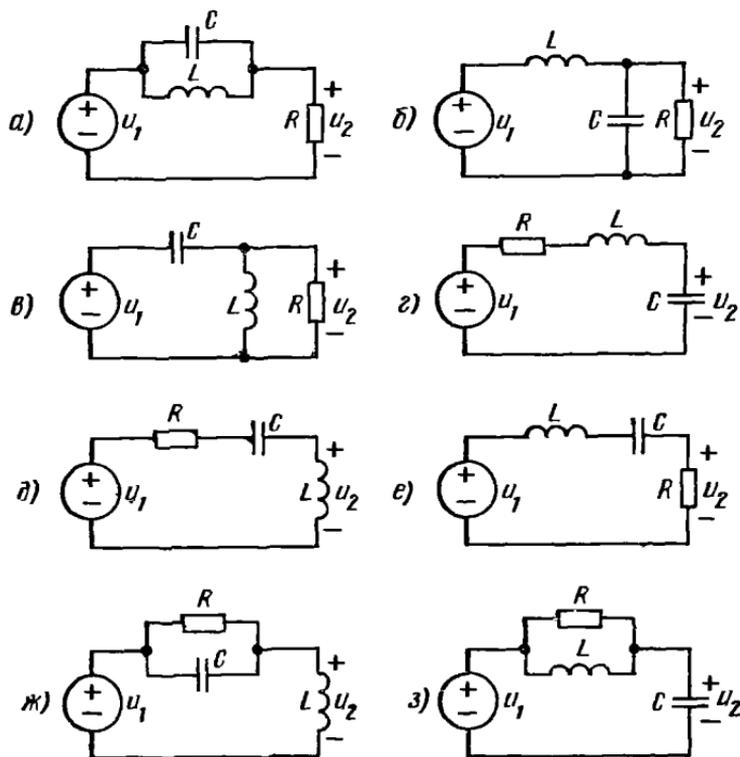


Рис. 7.10

7.11. Даны реактивные двухполюсники (рис. 7.11): $L_1=3$ Гн, $L=1$ Гн, $C_1=0,5$ Ф, $C=1$ Ф. Построить частотную характеристику $x(\omega)$.

7.12р. Последовательный RL -контур при нулевых начальных условиях в момент времени $t=0$ включается под действие источника напряжения $u=U_m \cos(2t+\alpha_u)$, $R=1$ Ом, $L=0,5$ Гн. Определить выражения тока цепи и напряжения u_L для случаев: 1) $i_B=$

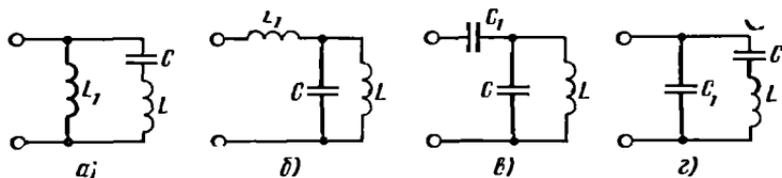


Рис. 7.11

$=2 \cos(2t-45^\circ)$ и 2) $u_{LБ}=2 \cos(2t+90^\circ)$. При каком значении начальной фазы напряжения источника α_u переходный процесс в цепи будет отсутствовать?

7.13. Структура цепи задана тройками чисел: 1, 3, 1; 2, 1, 2; 3, 2, 3; 4, 2, 3. Содержание ветвей: 1 — источник напряжения $u=U_m \cos \omega t=20 \cos 2t$; 2 — последовательно $R_1=4$ Ом и $L_1=1,5$ Гн; 3 — последовательно $R_2=2$ Ом и $L_2=2,5$ Гн; 4 — разомкнутый ключ. В момент $t=0$ ключ замыкается. Определить токи индуктивных элементов.

7.14. Последовательный RC -контур при нулевых начальных условиях в момент $t=0$ включается под действие источника напряжения $u=U_m \cos(2t+\alpha_u)$, $R=2$ Ом, $C=0,25$ Ф. Определить $u_C(t)$ и $i(t)$ для случаев: 1) $u_{CB}=4 \cos(2t-45^\circ)$ и 2) $i_B=2 \cos(2t+90^\circ)$. При каком значении α_u установившийся режим наступит мгновенно?

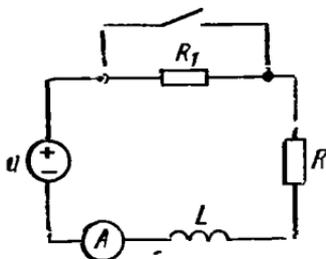


Рис. 7.15

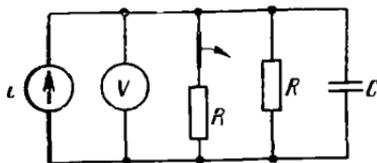


Рис. 7.16

7.15м. В цепи (рис. 7.15) $u=U_m \cos(2t+\alpha_u)$, $R_1=R=1$ Ом, $L=0,5$ Гн. В момент прохождения напряжения через положительный максимум замыкается ключ. Определить выражение тока переходного процесса, если до замыкания ключа амперметр показывал $I=5$ А. Решить задачу, заменив индуктивность емкостью $C=0,5$ Ф.

7.16. В цепи (рис. 7.16) $i = I_m \cos(2t + 26^\circ 30')$, $R = 2 \text{ Ом}$, $C = 0,25 \text{ Ф}$. В момент $t = 0$ размыкается ключ. Определить входное напряжение цепи при переходном процессе, если перед размыканием ключа показание вольтметра $U = 5 \text{ В}$. Решить задачу, заменив емкость индуктивностью $L = 1 \text{ Гн}$.

7.17р. Структура цепи представлена тройками чисел 1, 3, 1; 2, 1, 3; 3, 1, 2; 4, 2, 3; 5, 2, 3. Содержание ветвей: 1 — источник тока $i = 4 \cos(2t - 45^\circ)$; 2 — $R = 2 \text{ Ом}$; 3 — $C = 0,25 \text{ Ф}$; 4 — последовательно $R = 2 \text{ Ом}$ и $L = 1 \text{ Гн}$; 5 — разомкнутый ключ. В момент $t = 0$ ключ замыкается. Определить выражения $u_C(t)$, $i_L(t)$. Решить задачу, поменяв местами элементы L и C .

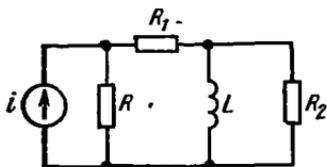


Рис. 7.18

7.18м. В цепи (рис. 7.18) с момента $t = 0$ действует источник тока $i(t)$: $R = R_1 = 1 \text{ Ом}$, $R_2 = 2 \text{ Ом}$, $L = 1 \text{ Гн}$. Определить при нулевых начальных условиях

входную реакцию цепи $u(t)$ для трех вариантов действующего с момента $t = 0$ сигнала:

- 1) $i(t) = 4 e^{-t} \cos(0,5t + 45^\circ)$;
- 2) $i(t) = 4 \sqrt{2} \cos(2t + 37^\circ)$;
- 3) $i(t) = 4 e^{-2t}$.

7.19. На цепь с момента $t = 0$ действует источник напряжения. Структура цепи определяется тройками чисел: 1, 2, 1; 2, 1, 2; 3, 1, 2. Содержание ветвей: 1 — последовательное соединение источника напряжения $u(t)$ и $R = 2 \text{ Ом}$; 2 — последовательное соединение $R_1 = 1 \text{ Ом}$ и $C = 0,25 \text{ Ф}$; 3 — $R_2 = 2 \text{ Ом}$. Определить при нулевых начальных условиях ток емкости для двух вариантов воздействующего сигнала:

- 1) $u(t) = 10 \cos 2t$;
- 2) $u(t) = 12 e^{-t}$.

7.20. Структура цепи представлена тройками чисел: 1, 3, 1; 2, 1, 3; 3, 1, 2; 4, 1, 3. Содержание ветвей: 1 — источник тока $i = 4 \cos t$; 2 — $R = 1 \text{ Ом}$; 3 — параллельное соединение $R_1 = 1 \text{ Ом}$ и замкнутого ключа; 4 — параллельное соединение $R_2 = 2 \text{ Ом}$ и $L = 1 \text{ Гн}$. В момент $t = 0$ размыкается ключ, определить $u(t)$.

7.21. Даны четыре элемента: $L = 1 \text{ Гн}$, $C = 1 \text{ Ф}$, $R_1 = R_2 = 1 \text{ Ом}$. Составьте из них двухполюсную цепь, у которой нули входной проводимости были бы расположены на плоскости комплексной частоты как можно левее от мнимой оси.

РЕШЕНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

7.3. По картине расположения нулей и полюсов записываем выражение $Z_{\text{вх}}(s)$:

$$Z_{\text{вх}}(s) = K \frac{l(s - s_{01})(s - s_{02})}{(s - s_1)} = K \frac{(s + 1 - j)(s + 1 + j)}{s + 2},$$

где K — постоянный коэффициент; $s_{01} = -1 + j$, $s_{02} = -1 - j$ — нули $Z_{вх}(s)$; $s_1 = -2$ — полюс $Z_{вх}(s)$. При $s = j\omega$

$$Z_{вх}(j\omega) = K \frac{(j\omega + 1 - j)(j\omega + 1 + j)}{(j\omega + 2)}$$

Так как при $\omega = 0$ $|Z(0)| = 1$, то $K = 1$.

Запишем комплексные выражения в круглых скобках в показательной форме

$$Z_{вх}(j\omega) = \frac{m'_1(\omega) e^{j\theta'_1(\omega)} m'_2(\omega) e^{j\theta'_2(\omega)}}{m_1(\omega) e^{j\theta_1(\omega)}}$$

Тогда характеристики:
амплитудно-частотная (АЧХ)

$$|Z_{вх}(j\omega)| = \frac{m'_1(\omega) m'_2(\omega)}{m_1(\omega)}$$

фазо-частотная (ФЧХ)

$$\varphi(\omega) = \theta'_1(\omega) + \theta'_2(\omega) - \theta_1(\omega).$$

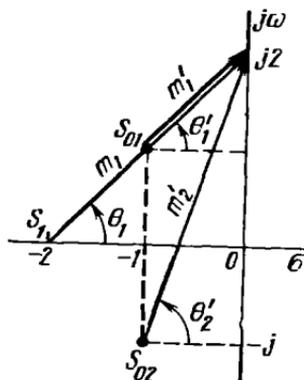


Рис. 7.36

Величины $m(\omega)$ и $\theta(\omega)$ легко определить по картине расположения нулей и полюсов.

Пример расчета АЧХ и ФЧХ для $\omega = 2$ приведен на рис. 7.36, по которому определяем:

$$m'_1 = |1 + 1| = \sqrt{2}, \quad m'_2 = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10},$$

$$m_1 = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}, \quad \theta'_1 = \arctg 1 = 45^\circ,$$

$$\theta'_2 = \arctg 3 = 71^\circ 30', \quad \theta_1 = \arctg 1 = 45^\circ.$$

Следовательно, при $\omega = 2$

$$|Z(j2)| = \frac{\sqrt{2} \sqrt{10}}{\sqrt{8}} = 1,58 \text{ Ом},$$

$$\varphi(2) = 45^\circ + 71^\circ 30' - 45^\circ = 71^\circ 30'.$$

Аналогично находим для $\omega = 1$ и $\omega = \infty$

$$|Z(j)| = 1 \text{ Ом}, \quad \varphi(1) = 37^\circ, \quad |Z(j\infty)| = \infty, \quad \varphi(\infty) = 90^\circ.$$

7.5. Для цепи (см. рис. 7.5, а) входная проводимость для заданных значений параметров R и L

$$Y_{\text{вх}}(s) = \frac{1}{Z_{\text{вх}}(s)} = \frac{s+1}{2s+1}.$$

При синусоидальном режиме $s=j\omega$, следовательно,

$$\begin{aligned} Y_{\text{вх}}(j\omega) &= Y_{\text{вх}}(s)|_{s=j\omega} = \frac{1+j\omega}{1+j2\omega} = \frac{\sqrt{1+\omega^2} e^{j \arctg \omega/1}}{\sqrt{1+4\omega^2} e^{j \arctg 2\omega/1}} = \\ &= |Y_{\text{вх}}(j\omega)| e^{j\psi(\omega)}, \end{aligned}$$

откуда характеристики:
амплитудно-частотная

$$|Y_{\text{вх}}(j\omega)| = \sqrt{\frac{1+\omega^2}{1+4\omega^2}},$$

фазо-частотная

$$\psi(\omega) = \arg Y_{\text{вх}}(j\omega) = \arctg \omega - \arctg 2\omega.$$

Некоторые значения $|Y_{\text{вх}}(j\omega)|$ и $\psi(\omega)$ приведены в табл. 7.1.

Таблица 7.1

| | | | | | |
|---------------------------------|---|-------|-------|-----|----------|
| ω , рад/с | 0 | 1 | 2 | ... | ∞ |
| $ Y_{\text{вх}}(j\omega) $, См | 1 | 0,632 | 0,542 | | 0,5 |
| $\psi(\omega)$, ° | 0 | -18,5 | -12,5 | | 0 |

Для получения выражений АЧХ и ФЧХ можно также представить

$$Y_{\text{вх}}(j\omega) = g(\omega) + jb(\omega) = \frac{1+2\omega^2}{1+4\omega^2} - j \frac{\omega}{1+4\omega^2}.$$

Тогда для нахождения АЧХ и ФЧХ используют выражения

$$|Y_{\text{вх}}(j\omega)| = \sqrt{g^2(\omega) + b^2(\omega)}, \quad \psi(\omega) = \arctg \frac{b(\omega)}{g(\omega)}.$$

Исследование других цепей (см. рис. 7.5) производят аналогично. Отметим, что в схемах рис. 7.5, в и г при $\omega=1$ будет наблюдаться резонанс, т. е. $\psi(1)=0$. Знаки ψ до и после резонанса будут в каждой из этих цепей различны.

7.8. Используя комплексную схему замещения цепи, методом пропорциональных величин найдем функцию цепи

$$H(s) = \frac{I_7}{I_1} = \frac{R}{2[L^2Cs^3 + 2RLCs^2 + (2L + R^2C)s + 2R]}.$$

При $s=j\omega$

$$H(j\omega) = \frac{R}{2[-jL^2C\omega^3 - 2RLC\omega^2 + j(2L + R^2C)\omega + 2R]}.$$

Введем нормировку по уровню и частоте

$$H_*(j\omega) = \frac{H(j\omega)}{H_0}, \quad \omega_* = \omega/\omega_0,$$

где H_0 и ω_0 — базисные значения функции передачи и частоты.

Примем

$$H_0 = R/l \overline{L/C}, \quad \omega_0 = 1/l \overline{LC}.$$

Заменяя в выражении для $H(j\omega)$, $\omega = \omega_*\omega_0$, получим

$$\begin{aligned} H_*(j\omega_*) &= \frac{1}{2\left(-j\omega_*^3 - \frac{2R}{l \overline{L/C}}\omega_*^2 + j\frac{2L + R^2C}{L}\omega_* + \frac{2R}{l \overline{L/C}}\right)} = \\ &= \frac{1}{(4 - 4\omega_*^2) + j(6\omega_* - 2\omega_*^3)}. \end{aligned}$$

Амплитудно-частотная характеристика

$$\begin{aligned} |H_*(j\omega_*)| &= \frac{1}{\sqrt{(4 - 4\omega_*^2)^2 + (6\omega_* - 2\omega_*^3)^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\omega_*^6 - 8\omega_*^4 + 4\omega_*^2 + 16}}. \end{aligned}$$

Фазо-частотная характеристика

$$\varphi_H(\omega_*) = \arg H_*(j\omega_*) = -\arctg \frac{6\omega_* - 2\omega_*^3}{4 - 4\omega_*^2}.$$

Для вычисления значений полинома подкоренного выражения АЧХ рекомендуется использовать схему Горнера, которая позволяет удобно располагать вычисления при нахождении численных значений полиномов.

Пусть дан полином

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, \quad (1)$$

требуется найти его величину для некоторого значения $x = a$. Напишем очевидное равенство

$$\frac{f(x)}{x-a} = f_1(x) + \frac{f(a)}{x-a}, \quad (2)$$

где $f_1(x)$ — полином степени $n-1$ (частное от деления $f(x)$ на $x-a$):

$$f_1(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_0. \quad (3)$$

Из (2) определяем

$$f(x) = f_1(x)(x-a) + f(a) = b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - ab_{n-1})x^{n-1} + \\ + (b_{n-3} - ab_{n-2})x^{n-2} + \dots + [f(a) - ab_0].$$

Отождествляя (1) и (4), получим:

$$b_{n-1} = a_n, \quad b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}, \dots \\ f(a) = a_0 + ab_0.$$

Вычисления производятся механически и легко программируются, если расположить эти величины по схеме Горнера:

$$+ \begin{array}{ccccccc} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 & & \\ & ab_{n-1} & ab_{n-2} & \dots & ab_0 & & \\ \hline b_{n-1} = a_n & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & f(a) & & \end{array}$$

В данном случае значения полинома подкоренного выражения АЧХ, например, для $\alpha = \omega_* = 0,5$ определяют следующим образом:

$$+ \begin{array}{ccccccc} 4 & 0 & -8 & 0 & 4 & 0 & 16 \\ & 2 & 1 & -3,5 & -1,75 & 1,125 & 0,5625 \\ \hline 4 & 2 & -7 & -3,5 & 2,25 & 1,125 & 16,5625 \end{array}$$

Следовательно,

$$|H_*(j0,5)| = \frac{1}{\sqrt{16,5625}} = 0,2457.$$

Результаты вычислений АЧХ и ФЧХ для $\omega_* \in [0; 2,5]$ приведены в табл. 7.2.

Таблица 7.2

| ω_* | 0 | 0,5 | 1,0 | 1,4 | 1,8 | 2,2 | 2,5 |
|-----------------------|------|---------|------|-------|-------|-------|-------|
| $ H_*(j\omega_*) $ | 0,25 | 0,246 | 0,25 | 0,207 | 0,111 | 0,06 | 0,037 |
| $\varphi_H(\omega_*)$ | 0 | -42°30' | -90° | -143° | -185° | -208° | -217° |

По данным таблицы на рис. 7.8б и 7.8в построены АЧХ и ФЧХ. На рис. 7.8г показана амплитудно-фазовая характеристика цепи.

7.12. При нулевых начальных условиях $i_L(0+) = i_L(0-) = 0$ общее выражение тока RL -контура

$$i = i_{sv}, \quad i_{sv} = I_m \cos \omega t + (a_u - \varphi) - I_m \cos (a_u - \varphi) e^{-\frac{R}{L} t}.$$

Для первого из заданных в условиях задачи случая $\alpha_i = -45^\circ$; $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R} = 1$, $\varphi = 45^\circ$. Следовательно, $\alpha_u = \alpha_i - \varphi = -45^\circ$, откуда $\alpha_u = \alpha_i + \varphi = 0$; $\delta = R/L = 2$ 1/с; $i = 2 \cos(2t - 45^\circ) - 2 \cos(-45^\circ)e^{-2t} = 2 \cos(2t - 45^\circ) - \sqrt{2}e^{-2t}$; $u_L = L \frac{di}{dt} = 2 \cos(2t + 45^\circ) + \sqrt{2}e^{-2t}$.

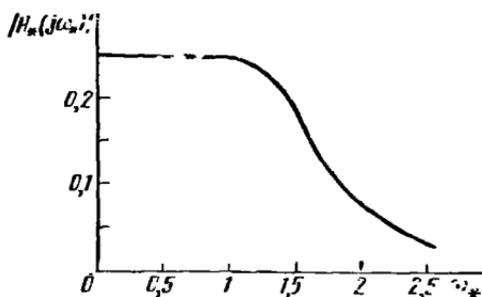


Рис. 7.8б

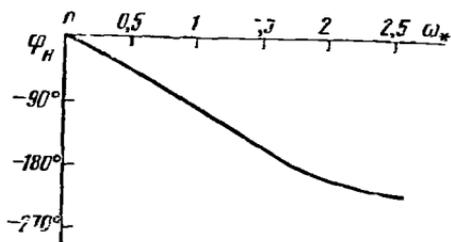


Рис. 7.8в

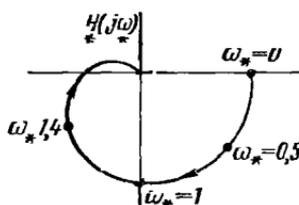


Рис. 7.8г

Начальную фазу α_u , при которой отсутствует переходный процесс, определяют из условия $\alpha_u - \varphi = \alpha_i = \pm 90^\circ$, откуда $\alpha_{u1} = 135^\circ$ и $\alpha_{u2} = -45^\circ$.

7.15. Учсть, что амперметр показывает действующее значение тока, т. е. $I = I_m / \sqrt{2}$. Определив I_m , следует установить начальные условия — вычислить $i_L(0-)$.

7.17. Схема цепи, построенная по условиям, дана на рис. 7.17, а. Используя метод комплексных амплитуд, определяем независимые

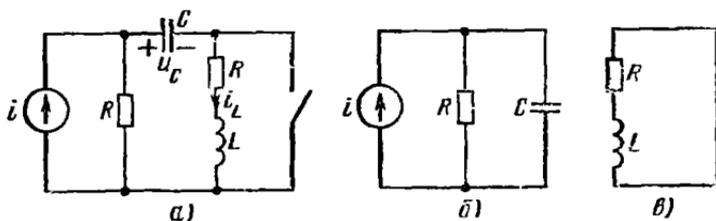


Рис. 7.17

начальные условия $i_L(0-)$ и $u_C(0-)$.

$$I_{Lm} = \tilde{I}_m \frac{Z_R}{2Z_R + Z_L + Z_C}, \text{ где } \tilde{I}_m = I_m e^{j\omega t} = 4 e^{-j45^\circ};$$

$$\underline{Z}_R = R = 2; \underline{Z}_L = j\omega L = j2; \underline{Z}_C = -j \frac{1}{\omega C} = -j2.$$

Подставляя численные значения, получаем $I_{Lm} = 2 e^{-j45^\circ}$ и $i_L(0-) = 2 \cos(-45^\circ) = \sqrt{2}$ А. Заметим, что до замыкания ключа цепь находится в резонансном состоянии

$$\dot{U}_{Cm} = \tilde{I}_{Lm} \underline{Z}_C = 4 e^{-j135^\circ}; \quad u_C(0-) = 4 \cos(-135^\circ) = -2\sqrt{2} \text{ В.}$$

После замыкания ключа цепь распадается на две, процессы в которых протекают независимо.

В цепи (рис. 7.17, б) напряжение вынужденного режима

$$\dot{U}_{Cm} = \tilde{I}_m \frac{\underline{Z}_R \underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = 4\sqrt{2} e^{-j90^\circ}; \quad u_{Cв} = 4\sqrt{2} \cos(2t - 90^\circ).$$

Постоянная затухания $\delta_1 = 1/RC = 2$ 1/с; постоянная интегрирования $A_1 = u_C(0+) - u_{Cв}(0+) = -2\sqrt{2}$. Окончательно $u_C = 4\sqrt{2} \cos \times (2t - 90^\circ) - 2\sqrt{2} e^{-2t}$. В цепи (рис. 7.17, в) будет только свободный процесс и ток

$$i_L = i_L(0+) e^{-\frac{R}{L} t} = \sqrt{2} e^{-2t}.$$

7.18. Для всех вариантов $u(t) = u_{в} + u_{св} = u_{в} + Ae^{-\delta t}$. Для указанных в условии задачи сигналов общая методика нахождения вынужденных составляющих искомым реакций дана в решении задачи 6.36. Методы нахождения постоянных интегрирования для свободных составляющих даны в решениях задач гл. 4.

ГЛАВА 8

АНАЛИЗ ЦЕПЕЙ С МНОГОПОЛЮСНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

В главе рассмотрены цепи с индуктивно-связанными катушками (элементами) и цепи с управляемыми источниками.

Использованы следующие сокращения: ИТУТ — источник тока, управляемый током; ИТУН — источник тока, управляемый напряжением; ИНУТ — источник напряжения, управляемый током; ИНУН — источник напряжения, управляемый напряжением.

8.1м. Две одинаковые индуктивно-связанные катушки включены по трансформаторной схеме (рис. 8.1). В установившемся синусоидальном режиме ($f = 50$ Гц) при разомкнутом ключе: $U_1 = 100$ В, $I_{10} = 4$ А, $U_{20} = 80$ В, $P_{10} = 80$ Вт.

1. Определить параметры катушек R , L , M и коэффициент магнитной связи k_M . 2. Найти токи катушек при замкнутом ключе ($U_1=100$ В).

8.2м. Индуктивно-связанный элемент характеризуется следующей матрицей индуктивностей:

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & -1 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}.$$

1. Изобразить схему элемента с указанием однополярных выводов и положительных направлений токов. 2. Вычислить коэффициент магнитной связи. 3. Определить матрицу обратных индуктивностей Γ .

8.3м. Для индуктивно-связанного элемента задачи 8.2 определить входные индуктивности в случаях последовательного и парал-

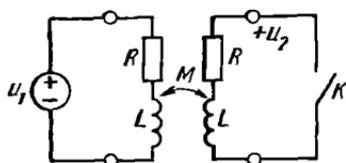


Рис. 8.1

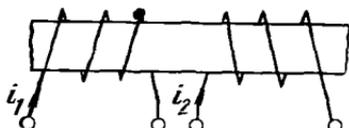


Рис. 8.4

ельного соединений ветвей элемента при согласном и встречном их включении. Найти параметры эквивалентной Т-образной схемы замещения элемента.

8.4м. Две катушки расположены на одном сердечнике (рис. 8.4), значения индуктивностей в Гн: $L_1=0,1$; $L_2=0,4$; $|M|=0,1$.

1. Отметить однополярные выводы катушек для указанных на схеме положительных направлений токов. 2. Определить коэффициент магнитной связи. 3. Записать матрицы L и Γ .

8.5. Определить напряжения на выводах индуктивно-связанного элемента, данные которого приведены в задаче 8.4, при следующих условиях: 1) по первой катушке протекает синусоидальный ток $I_1=2$ А, $f=50$ Гц, $I_2=0$ (вторая катушка разомкнута); 2) по второй катушке протекает синусоидальный ток $I_2=2$ А, $f=50$ Гц, $I_1=0$ (первая катушка разомкнута); 3) по обеим катушкам протекают токи $I_1=I_2=2$ А при $f=50$ Гц. Напряжения определить для согласного и встречного включений катушек. Для согласного включения вычислить матрицы сопротивлений и проводимостей элемента. Считать, что в п. 3 токи I_1 и I_2 совпадают по фазе.

8.6. Вычислить матрицу проводимостей для индуктивно-связанного элемента, данные которого приведены в задаче 8.4 при значении частоты приложенного синусоидального напряжения $f=50$ Гц.

Используя матрицу проводимостей, определить токи каждой из связанных катушек в следующих случаях: 1) $U_1=100$ В, $U_2=0$; 2) $U_1=0$, $U_2=100$ В; 3) $U_1=U_2=100$ В (совпадают по фазе).

Рассмотреть согласное и встречное включение катушек.

8.7р. Источник синусоидального напряжения ($U=100$ В) подключается к выводам цепи (рис. 8.7), указанным в табл. 8.1.

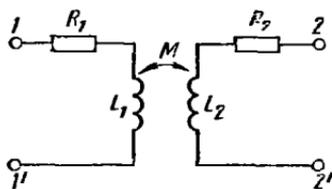


Рис. 8.7

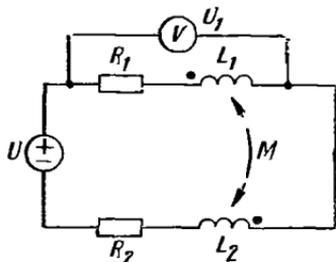


Рис. 8.8

В таблице указаны также соединения выходных зажимов и приведены показания амперметра и ваттметра, включенных со стороны входных зажимов. Определить R_1 , R_2 , L_1 , L_2 , M при $\omega=5 \cdot 10^3$ рад/с.

Таблица 8.1

| Выводы цепи | | I, А | P, Вт |
|-------------|-----------------|------|-------|
| входные | выходные | | |
| 1—2 | 1'—2' соединены | 0,79 | 75 |
| 1—2' | 1'—2 соединены | 0,5 | 33 |
| 1—1' | 2—2' разомкнуты | 1,0 | 80 |

8.8. Две индуктивно-связанные катушки соединены последовательно — рис. 8.8: $R_1=3$ Ом, $R_2=9$ Ом, $L_1=1$ Гн, $L_2=5$ Гн, $|M|=1$ Гн. В установившемся синусоидальном режиме при $\omega=2$ рад/с напряжение первой катушки при согласном включении составило $U_{1c}=10$ В. Определить показание вольтметра при встречном включении катушек (напряжение источника в обоих случаях одно и то же).

8.9. Цепь (рис. 8.9) находится в установившемся синусоидальном режиме; коэффициент магнитной связи $k_M=0,5$. При разомкнутом ключе $U_2/U_1=0,5$. Определить, каким будет отношение токов элемента L_1 при замкнутом и разомкнутом ключе. Рассмотреть согласное и встречное включение связанных L -элементов.

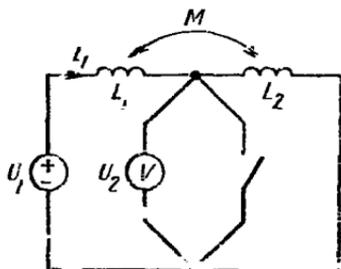


Рис. 8.9

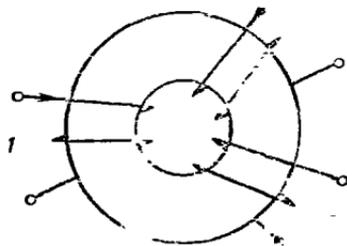


Рис. 8.10

8.10. Три катушки расположены на общем сердечнике, как это показано на рис. 8.10.

Для определения индуктивных параметров катушки по очереди подключались к источнику синусоидального тока частотой $f=50$ Гц; при этом остальные катушки разомкнуты. В каждом случае измерялись действующие значения напряжений на выводах катушек:

1) $I_1=0,2$ А; $U_1=125,6$ В; $U_2=62,8$ В; $U_3=31,4$ В;

2) $I_2=0,1$ А; $U_2=125,6$ В; $U_3=62,8$ В;

3) $I_3=0,1$ А; $U_3=251,2$ В.

1. По заданным положительным направлениям токов указать однополярные выводы катушек. 2. Определить матрицу сопротивлений элемента. 3. Вычислить напряжение U_1 (для п. 2) и U_1 и U_2 (для п. 3).

8.11. Известна матрица индуктивностей элемента из трех индуктивно-связанных ветвей

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

1. Изобразить схему элемента с маркировкой однополярных выводов и указанием положительных направлений токов. 2. Определить коэффициенты магнитной связи. 3. Вычислить матрицу обратных индуктивностей.

8.12. Параметры индуктивно-связанного элемента из трех ветвей приведены в условиях задачи 8.11. Определить эквивалентную входную индуктивность элемента при включении ветвей по схемам рис. 8.12.

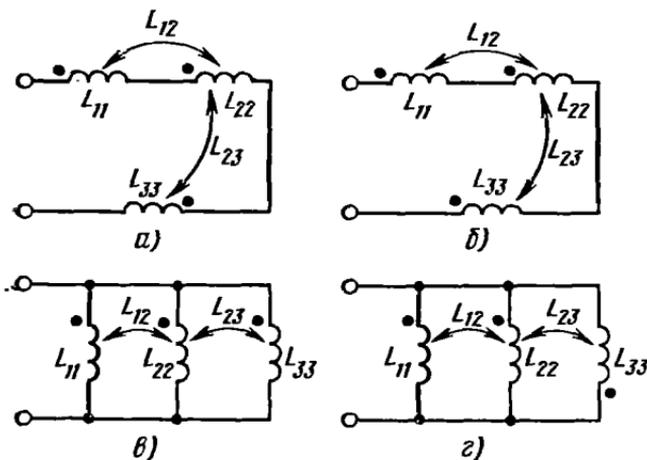


Рис. 8.12

8.13р. Для индуктивно-связанного элемента, рассмотренного в задаче 8.11, определить эквивалентную входную индуктивность при соединении ветвей элемента согласно рис. 8.13.

8.14м. Две индуктивно-связанные катушки включены по схеме рис. 8.14: $u_{01}=30\sqrt{2}\cos t$; $u_{02}=30\sqrt{2}\cos(t+90^\circ)$; $R_1=R_2=1\ \text{Ом}$; $C_1=0,2\ \text{Ф}$; $C_2=0,1\ \text{Ф}$; $L_1=10\ \text{Гн}$; $L_2=5\ \text{Гн}$; $|M|=2\ \text{Гн}$.

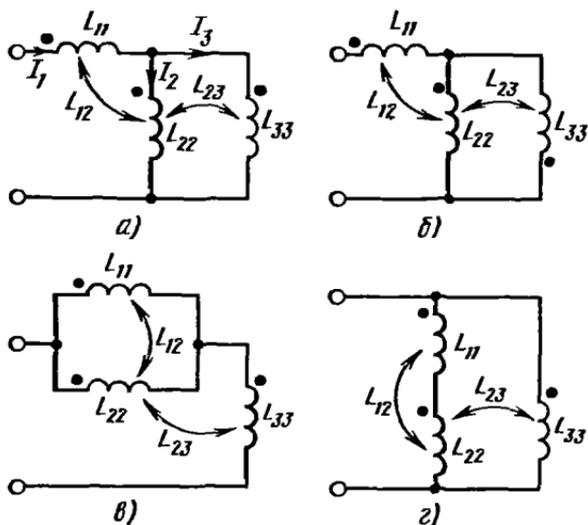


Рис. 8.13

Определить токи каждой катушки и средние значения мощностей источников и R -элементов в установившемся синусоидальном режиме.

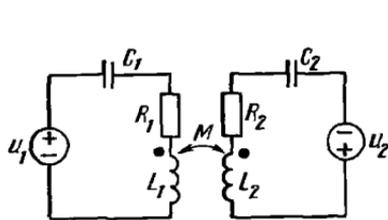


Рис. 8.14

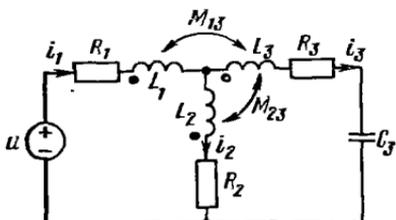


Рис. 8.15

8.15р. На рис. 8.15 приведена схема цепи с трехполюсным индуктивно-связанным элементом: $L_1=5\ \text{Гн}$, $L_2=2\ \text{Гн}$, $L_3=5\ \text{Гн}$, $|M_{13}|=1\ \text{Гн}$, $|M_{23}|=2\ \text{Гн}$, $R_1=4\ \text{Ом}$, $R_2=8\ \text{Ом}$, $R_3=3\ \text{Ом}$, $C=0,025\ \text{Ф}$.

Составить для установившегося синусоидального режима при $u=100\sqrt{2}\cos 2t$ систему уравнений по законам Кирхгофа и определить токи всех ветвей цепи.

Решить задачу методом эквивалентного преобразования схемы.

8.16р. Для цепи рис. 8.16а составить уравнения контурных токов в установившемся синусоидальном режиме; при составлении уравнений принять контуры, указанные на схеме.

Составить систему уравнений по законам Кирхгофа.

8.17р. Составить уравнения узловых напряжений цепи (рис. 8.16а) в установившемся синусоидальном режиме, приняв в качестве базисного узел 5.

8.18. Для цепи рис. 8.16а в установившемся синусоидальном режиме составить: 1) уравнения контурных токов, приняв в качестве контуров ячейки; 2) уравнения узловых напряжений, приняв в качестве базисного узел 5.

8.19м. В цепи (рис. 8.19): $R=1$ Ом, $L_1=1$ Гн, $L_2=2$ Гн, $|M|=1$ Гн, $C=1$ Ф, $i_{01}=\sqrt{2}\cos t$, $i_{02}=\sqrt{2}\cos(t+90^\circ)$. Определить мощность, потребляемую элементом R цепи в установившемся синусоидальном режиме.

8.20. Схема цепи дана на рис. 8.20; на схеме указаны численные значения параметров элементов в омах, генри и фарадах. Составить для установившегося синусоидального режима уравнения контурных токов (контуры обозначены на схеме); $u=18\cos t$. Определить контурные токи, токи ветвей, функцию передачи напряжений \dot{U}_2/\dot{U}_1 и вход-

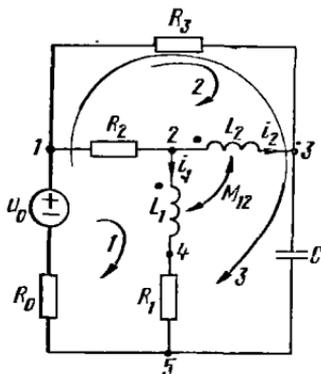


Рис. 8.16а

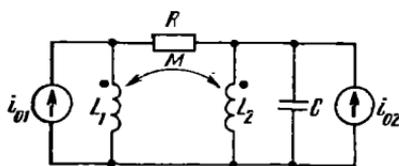


Рис. 8.19

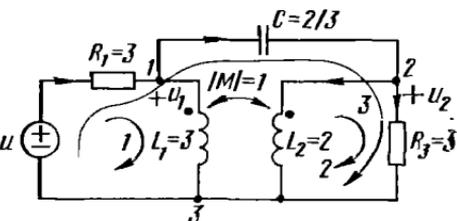


Рис. 8.20

ную проводимость. Решить задачу, используя эквивалентное преобразование схемы.

8.21. Для цепи, приведенной на рис. 8.20, составить для установившегося синусоидального режима при $\omega=1$ рад/с уравнения узловых напряжений (за базисный принять узел 3). Определить узловые напряжения, входное сопротивление и функцию передачи напряжений \dot{U}_2/\dot{U}_1 .

8.22м. Для цепи рис. 8.20 составить уравнения состояния.

8.23м. В цепи с параметрами R , L и C (рис. 8.23) действует источник синусоидального напряжения частоты f . Определить, при каком значении M цепь будет находиться в состоянии резонанса.

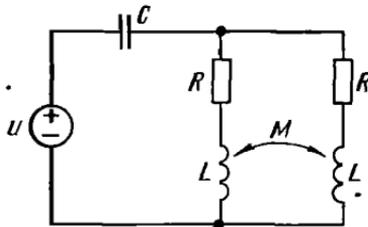


Рис. 8.23

8.24. Определить резонансные частоты цепи, представленной на рис. 8.24.

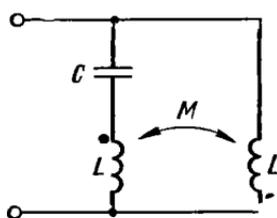


Рис. 8.24

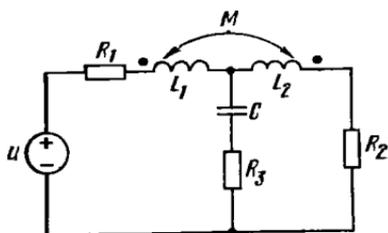


Рис. 8.25а

рой цепь будет находиться в резонансном состоянии; вычислить при резонансной частоте входное сопротивление цепи.

8.26р. Для цепи рис. 8.25а составить уравнения состояния.

8.27. В цепи рис. 8.27 $R_1=1$ Ом, $R_2=2$ Ом, $R_3=5$ Ом, $C=2$ Ф; при выбранных направлениях токов параметры индуктивно-связанного элемента заданы матрицей

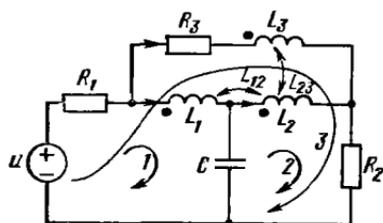


Рис. 8.27

$$L = [L] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Напряжение источника $u = 10 \cos t$.

Составить уравнения контурных токов в установившемся синусоидальном

режиме для указанных на схеме контуров.

8.28. Для цепи рис. 8.27 составить уравнения состояния.

8.29р. Определить функцию передачи \dot{U}_2/\dot{U}_1 , входное и выходное сопротивления цепи, изображенной на рис. 8.29.

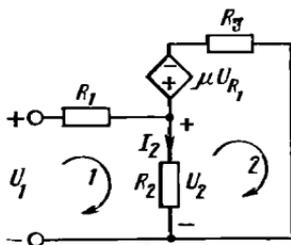


Рис. 8.29

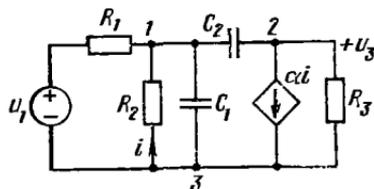


Рис. 8.30

8.30р. Определить для цепи (рис. 8.30) в установившемся синусоидальном режиме функцию передачи по напряжению \dot{U}_3/\dot{U}_1 .

8.31м. Для цепи рис. 8.30 составить уравнения состояния.

8.32р. Составить уравнения контурных токов для установившегося синусоидального режима цепи (рис. 8.32а) с трехполюсным элементом, заданным матрицей сопротивлений

$$[Z] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}.$$

Определить функцию передачи \dot{U}_2/\dot{U}_{01} и входное сопротивление. Составить уравнения контурных токов, заменив трехполюсный элемент схемой с зависимыми источниками.

8.33м. Составить уравнения состояния цепи, приведенной на рис. 8.32а.

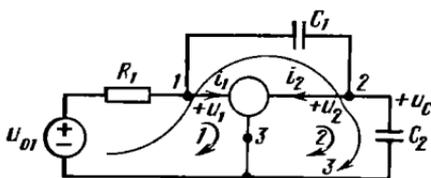


Рис. 8.32а

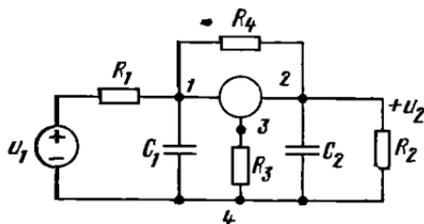


Рис. 8.34

8.34м. Составить уравнения узловых напряжений в установившемся синусоидальном режиме для цепи (рис. 8.34) с трехполюсным элементом, заданным матрицей проводимостей

$$[Y] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}.$$

Определить функцию передачи \dot{U}_2/\dot{U}_1 . За базисный принять узел 4. Составить уравнения, заменив трехполюсный элемент схемой с зависимыми источниками.

8.35м. Для цепи рис. 8.34 составить уравнения состояния.

8.36. Цепь, представленная на рис. 8.36, содержит n источников тока, управляемых током (ИТУТ). Определить функцию передачи $H_U = \dot{U}_2/\dot{U}_1$, вычислить значение H_U при $n=2$; $\alpha=0,99$ и $G_2/G_1=0,5$. Построить схему цепи на транзисторах, приближенно реализующую заданную.

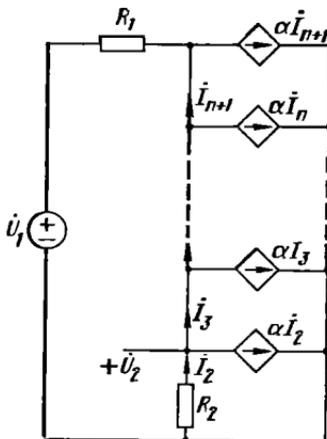


Рис. 8.36

8.37. Составить уравнения узловых напряжений цепи с двумя ИТУТ (рис. 8.37), определить $H_U = \dot{U}_3/\dot{U}_1$ и входное сопротивление цепи. Изобразить транзисторную схему, приближенно реализующую цепь. Решить задачу, приняв $Z_1=1/Y_1=0$ и $Z_2=1/Y_2=0$.

8.38м. Составить уравнения узловых напряжений и определить входное сопротивление цепи, представленной на рис. 8.38. Оценить

значение сопротивления при $\alpha=0,99$. Изобразить транзисторную схему, приближенно реализующую цепь.

8.39. Для цепи с источником напряжения, управляемого напряжением (ИНУН), изображенной на рис. 8.39: 1) составить уравнения контурных токов; 2) определить функцию передачи \dot{U}_2/\dot{U}_1 ; при-

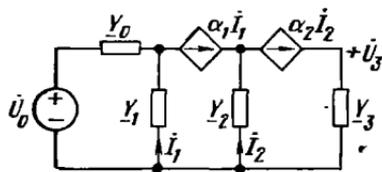


Рис. 8.37

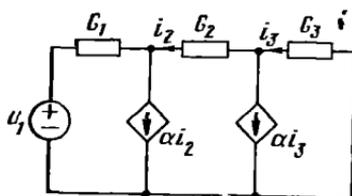


Рис. 8.38

няв $Z_1=Z_2=1$, определить проводимости $Y_3=sC_4$ и k_U из условия получения функции передачи $H_U = \frac{3}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$.

8.40. Для цепи рис. 8.39 определить функцию передачи, используя метод узловых напряжений.

8.41м. Составить матрицу узловых проводимостей цепи (рис.

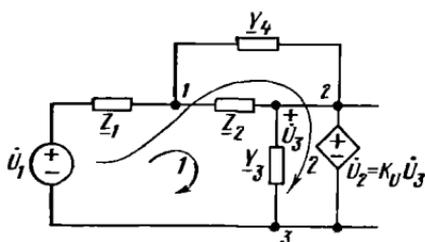


Рис. 8.39

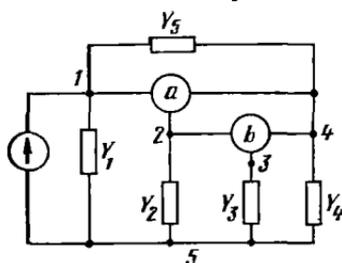


Рис. 8.41

8.41) с двумя трехполюсными элементами, заданными матрицами проводимостей

$$[Y^a] = \begin{bmatrix} g_{11}^a & g_{12}^a \\ g_{21}^a & g_{22}^a \end{bmatrix}; \quad [Y^b] = \begin{bmatrix} g_{11}^b & g_{12}^b \\ g_{21}^b & g_{22}^b \end{bmatrix}.$$

За базисный принять узел 5.

8.42. Решить задачу 8.37, заменив трехполюсные элементы схемами с зависимыми источниками.

8.43м. Составить матрицу узловых проводимостей цепи, представленной на рис. 8.43.

8.44м. Составить уравнения, контурных токов в установившемся синусоидальном режиме для цепи рис. 8.44. Численные значения параметров элементов в омах, генри и фарадах указаны на схеме; $u_0 = 2 \cos t$.

8.45. Составить уравнения узловых напряжений для цепи (рис. 8.45); значения параметров заданы на схеме в генри, фарадах, омах.

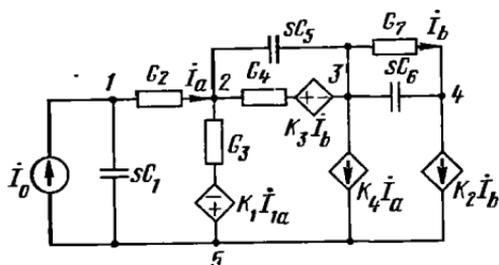


Рис. 8.43

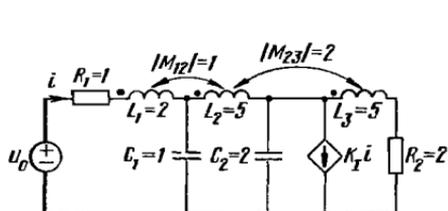


Рис. 8.44

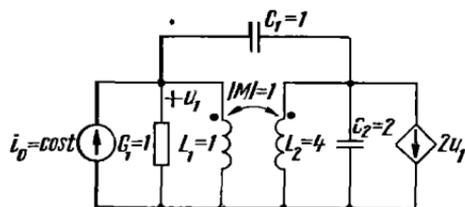


Рис. 8.45

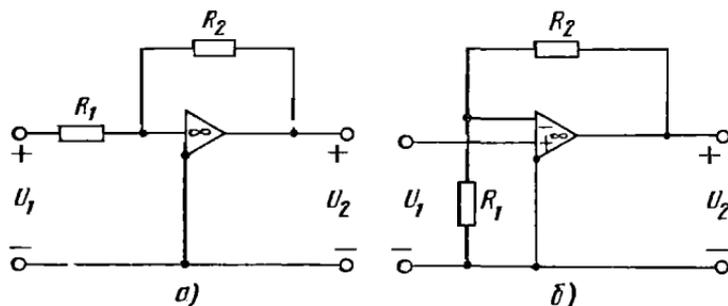


Рис. 8.46

8.46. Определить функции передачи \dot{U}_2/\dot{U}_1 цепей с операционными усилителями (ОУ), представленными на рис. 8.46, а, б.

8.47. Определить функцию передачи цепи с ОУ, изображенной на рис. 8.47.

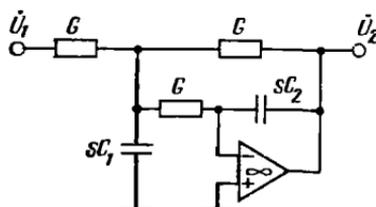


Рис. 8.47

8.1. В условиях задачи P_{10} есть активная мощность катушки 1 при разомкнутой цепи катушки 2; очевидно, что $P_{10} = RI_{10}^2$.

8.2. Матрица обратных индуктивностей Γ — это матрица, обратная матрице индуктивностей L , т. е. $\Gamma = L^{-1}$. Определяют матрицу Γ по математическим правилам нахождения обратной матрицы по заданной неособенной матрице.

8.3. При определении входной индуктивности в случае параллельного соединения ветвей элемента воспользоваться матрицей обратных индуктивностей Γ .

8.4. Для разметки однополярных выводов следует использовать правило правоходового винта.

8.7. Первый и второй варианты соединения выводов цепи (см. табл. 8.1) соответствуют последовательному соединению индуктивно-связанных ветвей, в первом случае их включение встречное, что определяется большим значением тока ($0,79 > 0,5$).

Для первой схемы, соответствующей первому варианту соединения выводов цепи, имеем:

$$|Z_B| = \frac{U}{I_B} = \frac{100}{0,79} = 126,6 \text{ Ом};$$

$$r_B = R_1 + R_2 = \frac{P_B}{I_B^2} = \frac{75}{0,79^2} = 120 \text{ Ом};$$

$$\omega L_B = \sqrt{|Z_B|^2 - r_B^2} = \sqrt{126,6^2 - 120^2} \approx 40 \text{ Ом}$$

(индекс «в» — встречное включение).

Для схемы, соответствующей второму варианту соединения выводов цепи,

$$|Z_C| = \frac{U}{I_C} = \frac{100}{0,5} = 200 \text{ Ом};$$

$$r_C = R_1 + R_2 = \frac{P_C}{I_C^2} = \frac{30}{0,5^2} = 120 \text{ Ом};$$

$$\omega L_C = \sqrt{|Z_C|^2 - r_C^2} = 160 \text{ Ом}$$

(индекс «с» — согласное включение).

Так как

$$L_C = L_1 + L_2 + 2|M|, \quad \text{а} \quad L_B = L_1 + L_2 - 2|M|,$$

$$\text{то} \quad |M| = \frac{L_C - L_B}{4} = \frac{\omega L_C - \omega L_B}{4\omega} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ Г.}$$

В третьем варианте соединения к источнику подключена только первая катушка; вторая разомкнута.

Имеем

$$|Z_1| = \frac{U}{I_1} = \frac{100}{1,0} = 100 \text{ Ом}; \quad R_1 = \frac{P_1}{I_1^2} = 80 \text{ Ом};$$

$$\omega L_1 = \sqrt{|Z_1|^2 - R_1^2} = 60 \text{ Ом}; \quad L_1 = \frac{\omega L_1}{\omega} = 12 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

Параметры второй катушки:

$$R_2 = R_c - R_1 = R_b - R_1 = 40 \text{ Ом};$$

$$\omega L_2 = \omega L_b - \omega L_1 + 2\omega |M| = 40 \text{ Ом}; \quad L_2 = 8 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

В итоге $R_1 = 80 \text{ Ом}$, $L_1 = 6 \text{ мГн}$; $R_2 = 40 \text{ Ом}$, $L_2 = 8 \text{ мГн}$; $|M| = 6 \text{ мГн}$.

8.13. В схеме (см. рис. 8.13, а) для выбранных направлений токов включение индуктивных элементов L_{11} и L_{22} , L_{22} и L_{33} — согласное. Параметры связанного элемента приведены в условиях задачи 8.11.

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix}; \quad L_{11} = 2 \text{ Гн}; \quad L_{22} = 3 \text{ Гн}; \quad L_{33} = 5 \text{ Гн}. \\ |L_{12}| = |L_{21}| = 1 \text{ Гн}; \quad L_{13} = L_{31} = 0; \\ |L_{23}| = |L_{32}| = 2 \text{ Гн}.$$

Для соединения имеем следующие уравнения по законам Кирхгофа:

$$i = i_1 = i_2 + i_3, \quad \dot{U}_2 = \dot{U}_3, \quad \dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2.$$

В соответствии с L запишем уравнения элемента:

$$\dot{U}_1 = sL_{11}i_1 + sL_{12}i_2 + sL_{13}i_3, \quad \dot{U}_2 = sL_{21}i_1 + sL_{22}i_2 + sL_{23}i_3,$$

$$\dot{U}_3 = sL_{31}i_1 + sL_{32}i_2 + sL_{33}i_3.$$

Подставляя численные значения параметров (с учетом согласного включения ветвей) и выражая $i_3 = i_1 - i_2$, получаем:

$$\dot{U}_1 = 2si_1 + si_2, \quad \dot{U}_2 = si_1 + 3si_2 + 2s(i_1 - i_2) = 3si_1 + si_2,$$

$$\dot{U}_3 = 2si_2 + 5s(i_1 - i_2) = 5si_1 - 3si_2.$$

Так как $\dot{U}_2 = \dot{U}_3$, то из двух последних уравнений находим $i_2 = 0,5i_1$. С учетом последнего соотношения

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 5si_1 + 2si_2 = 6si_1 = Ls\dot{i}_1.$$

Эквивалентная индуктивность $L = 6 \text{ Гн}$.

8.14. Активные мощности элементов цепи:

$$P_1 = -\text{Re}[\dot{U}_{01}\bar{i}_1] = 30 \text{ Вт}, \quad P_2 = -\text{Re}[\dot{U}_{02}\bar{i}_2] = 90 \text{ Вт},$$

$$[P_{R_1} = R_1 i_1^2 = 26 \text{ Вт}, \quad P_{R_2} = R_2 i_2^2 = 34 \text{ Вт}.$$

Эти результаты показывают, что в цепь отдает энергию только

источник $U_{02}(P_2 < 0)$, все остальные элементы потребляют энергию, при этом магнитным полем связанных элементов из второй ветви в первую передается мощность $P_1 + P_{R_1} = 56$ Вт.

8.15. Составляем систему уравнений Кирхгофа для комплексных действующих значений токов и напряжений:

$$\begin{aligned} -\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 &= 0, \\ R_1 \dot{I}_1 + sL_1 \dot{I}_1 + sM_{13} \dot{I}_3 + sL_2 \dot{I}_2 + sM_{23} \dot{I}_3 + R_2 \dot{I}_2 &= \dot{U}, \\ sL_3 \dot{I}_3 + sM_{13} \dot{I}_1 + sM_{23} \dot{I}_2 + R_3 \dot{I}_3 + \frac{1}{sC} \dot{I}_3 - R_2 \dot{I}_2 - \\ - sL_2 \dot{I}_2 - sM_{23} \dot{I}_3 &= 0. \end{aligned}$$

В уравнениях $M_{13} > 0$, $M_{23} < 0$, что определяется выбранными направлениями токов относительно однополярных выводов индуктивно-связанного элемента; $s = j\omega = j2$.

Переходя к численным значениям, получаем:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 \quad -\dot{I}_2 \quad -\dot{I}_3 &= 0, \\ (4 + j10)\dot{I}_1 + (8 + j4)\dot{I}_2 \quad -j2 \cdot \dot{I}_3 &= 100, \\ -j2\dot{I}_1 - (8 + j8)\dot{I}_2 + (3 - j6)\dot{I}_3 &= 0, \\ D &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 + j10 & 8 + j4 & -j2 \\ j2 & -8 - j8 & 3 - j6 \end{vmatrix} = 76 + j82 = 111,8 e^{j47^\circ 10'}, \\ D_1 &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 100 & 8 + j4 & -j2 \\ 0 & -8 - j8 & 3 - j6 \end{vmatrix} = 1100 + j200 = 1118 e^{j10^\circ 18'}. \end{aligned}$$

Аналогично получаем: $D_2 = 300 - j400$; $D_3 = 800 + j600$. Токи цепи:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= D_1/D = 8 - j6; \quad \dot{I}_2 = D_2/D = -0,8 - j4,4; \\ \dot{I}_3 &= D_3/D = 8,8 - j1,6. \end{aligned}$$

Действующие значения: $I_1 = 10$ А; $I_2 = 4,472$ А; $I_3 = 8,944$ А.

8.16. Независимые контуры выбраны таким образом, что через каждую индуктивно-связанную ветвь проходит только один контурный ток; это существенно упрощает составление уравнений.

Ветвь L_1 входит в контур 1, ветвь L_2 — в контур 2; направления токов этих ветвей указаны на схеме рис. 8.16а, им соответствует согласное включение связанных ветвей.

Предполагая согласованными и положительные направления напряжений и токов L -элементов, записываем в матричной форме уравнение, связывающее эти величины,

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} L_1 & M_{12} \\ M_{21} & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} L_1 & M_{12} \\ M_{21} & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{(1)} \\ -\dot{I}_{(2)} \end{bmatrix}.$$

В уравнении $M > 0$; $I_{(1)}$; $I_{(2)}$ — контурные токи, причем $I_1 = I_{(1)}$; $I_2 = -I_{(2)}$.

Так как \dot{U}_1 войдет в первое уравнение со знаком «+» (направления контурного тока $\dot{I}_{(1)}$ и \dot{U}_1 совпадают), а \dot{U}_2 — во второе уравнение со знаком «-» (положительные направления $\dot{I}_{(2)}$ и \dot{U}_2 не совпадают), то получаем уравнения: $\dot{U}_1 = sL_1 I_{(1)} - sM I_{(2)}$; $-\dot{U}_2 = -sM I_{(1)} + sL_2 I_{(2)}$.

По этим уравнениям составляем матрицу Z_k^a ; принимаем $s = j\omega$. Так как в цепи имеется третий независимый контур с током $I_{(3)}$, не связанный индуктивно с двумя другими, то матрица содержит соответствующие строку и столбец нулевых элементов:

$$Z_k^a = \begin{bmatrix} j\omega L_1 & -j\omega M_{12} & 0 \\ -j\omega M_{21} & j\omega L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица контурных сопротивлений подцепы, содержащей только двухполюсные элементы,

$$Z_k^b = \begin{bmatrix} R_0 + R_1 + R_2 & -R_2 & R_0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 & R_3 \\ R_0 & R_3 & R_0 + R_3 + \frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix}.$$

Эту матрицу составляют по обычным правилам для цепи, получающейся из исходной, при коротком замыкании связанных ветвей L_1 и L_2 (рис. 8.16, б).

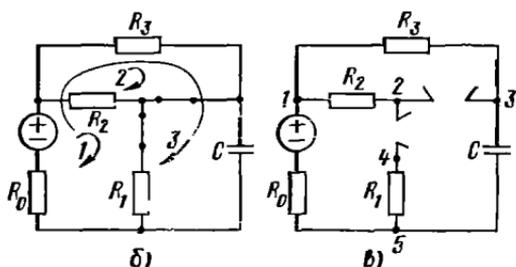


Рис. 8.16

Суммирование приведенных матриц дает искомую матрицу контурных сопротивлений

$$Z_k = Z_k^a + Z_k^b = \begin{bmatrix} R_0 + R_1 + R_2 + j\omega L_1 & -R_2 - j\omega M_{12} & R_0 \\ -R_2 - j\omega M_{21} & R_2 + R_3 + j\omega L_2 & R_3 \\ R_0 & R_3 & R_0 + R_3 + \frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix}.$$

Правая часть уравнений составляется как и в цепях с двухполюсными элементами; в рассматриваемом случае

$$[\dot{U}_{(1)} \dot{U}_{(2)} \dot{U}_{(3)}]^t = [\dot{U}_0 \ 0 \ \dot{U}_0]^t.$$

8.17. Магнитно-связанные ветви присоединены: L_1 — к узлам 2 и 4; L_2 — к узлам 2 и 3; в обоих случаях направление тока принято от узла 2. Связь между токами связанных ветвей и их напряжениями определяется равенством

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{(2)} - \dot{U}_{(4)} \\ \dot{U}_{(2)} - \dot{U}_{(3)} \end{bmatrix}.$$

В матричном уравнении $s = j\omega$, Γ находят как матрицу, обратную L , причем $M_{12} > 0$. Напряжения \dot{U}_1 и \dot{U}_2 выражены через напряжения соответствующих узлов.

По схеме рис. 8.16а устанавливаем, что из узла 2 вытекает ток $I_1 + I_2$; в узел 3 втекает ток I_2 , а в узел 4 — ток I_1 . Далее необходимо через Γ -параметры и напряжения узлов выразить вектор токов $[(I_1 + I_2) - I_2 - I_1]^t$ (токам, вытекающим из узла, приписывается знак «+»).

Из записанного уравнения находим:

$$\dot{i}_1 = \frac{1}{s} (\Gamma_{11} \dot{U}_{(2)} - \Gamma_{11} \dot{U}_{(4)} + \Gamma_{12} \dot{U}_{(2)} - \Gamma_{12} \dot{U}_{(3)}),$$

$$\dot{i}_2 = \frac{1}{s} (\Gamma_{21} \dot{U}_{(2)} - \Gamma_{21} \dot{U}_{(4)} + \Gamma_{22} \dot{U}_{(2)} - \Gamma_{22} \dot{U}_{(3)}).$$

Опуская некоторые выкладки, получаем выражение

$$\begin{bmatrix} 0 \\ (I_1 + I_2) \\ -I_2 \\ -I_1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{s} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{11} + \Gamma_{12} + \Gamma_{21} + \Gamma_{22} & -\Gamma_{12} - \Gamma_{22} & -\Gamma_{11} - \Gamma_{21} \\ 0 & -\Gamma_{21} - \Gamma_{22} & \Gamma_{22} & \Gamma_{21} \\ 0 & -\Gamma_{11} - \Gamma_{12} & \Gamma_{12} & \Gamma_{11} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{U}_{(1)} \\ \dot{U}_{(2)} \\ \dot{U}_{(3)} \\ \dot{U}_{(4)} \end{bmatrix} = Y_y^a U_{(k)};$$

к матрице приписаны первая строка и первый столбец из нулевых элементов, так как в цепи имеется еще узел 1, к которому не смыкаются ветви с индуктивно-связанными элементами.

Матрицу узловых проводимостей Y_y^{σ} подцепи, содержащую только двухполюсные элементы, составляют по обычным правилам для цепи, получающейся из исходной при разрыве всех индуктивно-связанных L -ветвей (рис. 8.16, в).

В задаче

$$Y_y^{\sigma} = \begin{bmatrix} G_0 + G_2 + G_3 & -G_2 & -G_3 & 0 \\ -G_2 & G_2 & 0 & 0 \\ -G_3 & 0 & G_3 + j\omega C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_1 \end{bmatrix}$$

Суммирование матриц дает искомую матрицу узловых проводимостей

$$Y_y = Y_y^a + Y_y^{\sigma} = \begin{bmatrix} G_0 + G_2 + G_3 & -G_2 & -G_3 & 0 \\ -G_2 & G_2 - \frac{j}{\omega}(\Gamma_{11} + 2\Gamma_{12} + \Gamma_{22}) & \frac{j}{\omega}(\Gamma_{12} + \Gamma_{22}) & \frac{j}{\omega}(\Gamma_{11} + \Gamma_{21}) \\ -G_3 & \frac{j}{\omega}(\Gamma_{12} + \Gamma_{22}) & G_3 - \frac{j}{\omega}\Gamma_{22} + j\omega C & -\frac{j}{\omega}\Gamma_{21} \\ 0 & \frac{j}{\omega}(\Gamma_{11} + \Gamma_{21}) & -\frac{j}{\omega}\Gamma_{21} & G_1 - \frac{j}{\omega}\Gamma_{11} \end{bmatrix}$$

Правую часть уравнений узловых напряжений составляют так же, как в цепях с двухполюсными элементами; в рассматриваемом случае $I_{(k)} = [I_0 \ 0 \ 0 \ 0]^t$, где $I_0 = G_0 U_0$.

Следует заметить, что составить уравнения узловых напряжений будет проще, если в качестве базисного выбрать узел, к которому сходятся индуктивно-связанные ветви (если такой имеется). В рассмотренной цепи таким узлом является узел 2.

8.19. При решении задачи целесообразно использовать метод узловых напряжений, приняв за базисный узел 3.

8.22. Предварительно следует ознакомиться с решением задачи 8.26.

8.23. Обратит внимание на то, что токи индуктивно-связанных ветвей при заданных параметрах равны между собой.

8.25. Целесообразно использовать метод контурных токов и, определив входное сопротивление цепи, рассмотреть условия, при которых мнимая часть его обращается в нуль при изменении частоты.

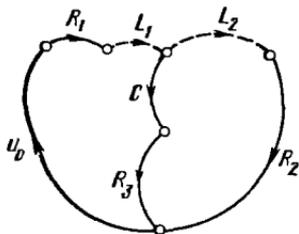


Рис. 8.256

8.26. Формирование уравнений состояния для цепей с магнитно-связанными элементами принципиально не отличается от формирования уравнений в обычных цепях.

Для нормального дерева графа (сплошные линии на рис. 8.256) имеем следующие независимые уравнения для главных сечений и главных контуров:

$$i_C - i_{L1} + i_{L2} = 0, \quad (8.1)$$

$$i_{R1} - i_{L1} = 0, \quad (8.2)$$

$$i_{R2} - i_{L2} = 0, \quad (8.3)$$

$$i_{R3} - i_{L1} + i_{L2} = 0, \quad (8.4)$$

$$u_{L1} + u_C + u_{R3} - u_0 + u_{R1} = 0, \quad (8.5)$$

$$u_{L2} + u_{R2} - u_{R3} - u_C = 0. \quad (8.6)$$

Приняв за основу уравнения (8.1), (8.5) и (8.6), получаем:

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} i_{L1} - \frac{1}{C} i_{L2}, \quad (8.1a)$$

$$L_1 \frac{di_{L1}}{dt} + M \frac{di_{L2}}{dt} = u_{L1} = -u_C - u_{R1} - u_{R3} + u_0, \quad (8.5a)$$

$$M \frac{di_{L1}}{dt} + L_2 \frac{di_{L2}}{dt} = u_{L2} = u_C - u_{R2} + u_{R3}. \quad (8.6a)$$

С помощью остальных уравнений исключаем из (8.5a) и (8.6a) напряжения резистивных элементов

$$u_{R1} = R_1 i_{R1} = R_1 i_{L1};$$

$$u_{R2} = R_2 i_{R2} = R_2 i_{L2};$$

$$u_{R3} = R_3 i_{R3} = R_3 (i_{L1} - i_{L2}).$$

Далее для упрощения выкладок подставляем численные значения параметров, причем $M = -0,5$ Гн.

$$\frac{du_C}{dt} = 6i_{L1} - 6i_{L2}, \quad (8.1a)$$

$$\frac{di_{L1}}{dt} - 0,5 \frac{di_{L2}}{dt} = -u_C - 2i_{L1} + i_{L2} + u_0, \quad (8.7)$$

$$-0,5 \frac{di_{L1}}{dt} + 1,5 \frac{di_{L2}}{dt} = u_C + i_{L1} - 4i_{L2}. \quad (8.8)$$

Исключая из (8.7) $\frac{di_{L2}}{dt}$, а из (8.8) $\frac{di_{L1}}{dt}$, получаем:

$$\frac{du_C}{dt} = 6i_{L1} - 6i_{L2},$$

$$\frac{di_{L1}}{dt} = -0,8u_c - 2i_{L1} - 0,4i_{L2} + 1,2u_0,$$

$$\frac{di_{L2}}{dt} = 0,4u_c - 2,8i_{L2} + 0,4u_0.$$

8.29. Составляем уравнения по методу контурных токов; в качестве контуров выбираем ячейки (см. рис. 8.29).

Матрицу контурных сопротивлений пассивной части цепи (ИНУТ замыкается накоротко) составляют обычным порядком

$$Z_k^c = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{bmatrix}.$$

Матрица контурных сопротивлений, обусловленная наличием ИНУТ, имеет вид

$$Z_k^a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mu R_1 & 0 \end{bmatrix};$$

элементы этой матрицы определяются тем, в каком контуре расположен ИНУТ и током какого контура он управляется.

В рассматриваемом случае только элемент Z_{21}^a матрицы отличен от нуля, так как зависимый источник принадлежит второму контуру (первый индекс) и управляется током только первого контура, потому что $\mu U_{R1} = \mu R_1 I_1 = \mu R_1 I_{(1)}$. Это определяет второй индекс элемента матрицы. Знак Z_{21}^a определяется в зависимости от взаимного направления тока $I_{(2)}$ и напряжения ИНУТ. В данной задаче направления совпадают, поэтому $Z_{21}^a = \mu R_1$.

Суммирование матриц даст

$$Z_k = Z_k^a + Z_k^c = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 + \mu R_1 & R_2 + R_3 \end{bmatrix}.$$

$$\dot{U}_2 = R_2 \dot{I}_{R2} = R_2 (\dot{I}_{(1)} - \dot{I}_{(2)}) = R_2 \frac{\dot{U}_1 (D_{11} + D_{12})}{D}.$$

Опуская промежуточные преобразования, получаем:

$$\dot{U}_2 / \dot{U}_1 = H_U = \frac{\mu + R_3/R_1}{\mu + 1 + R_3/R_1 + R_3/R_2},$$

$$\dot{U}_1 / \dot{I}_1 = D / D_{11} = D / (R_2 + R_3) = R_1 \frac{\mu + 1 + R_3/R_1 + R_3/R_2}{1 + R_3/R_2}.$$

Здесь D — главный определитель системы; D_{ik} — определитель, получающийся вычеркиванием из D строки i и столбца k .

8.30. Исходные уравнения составляем по методу узловых напряжений; за базисный принимаем узел 3 (см. рис. 8.30). В цепи имеется зависимый источник тока, управляемый током (ИТУТ). Матрица узловых проводимостей, обусловленная наличием ИТУТ,

имеет вид $Y_y^a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\alpha G_2 & 0 \end{bmatrix}$; элементы этой матрицы определяются тем, между какими узлами включен и напряжением каких узлов управляется источник. В данном случае ИТУТ включен между узлом 2 и базисным, а управляется напряжением узла 1, так как $\alpha I = \alpha (U_{(3)} - U_{(1)}) G_2 = -\alpha G_2 U_{(1)}$.

Следовательно, только один элемент матрицы Y_{21}^a будет отличен от нуля, причем $Y_{21}^a = -\alpha G_2$, так как ток ИТУТ вытекает из узла 2 (в противном случае знак следовало обратить). Матрицу узловых проводимостей пассивной части цепи составляют обычным порядком (проводимость ИТУТ принимается равной нулю)

$$Y_y^{\sigma} = \begin{bmatrix} G_1 + G_2 + s(C_1 + C_2) & -sC_2 \\ -sC_2 & G_3 + sC_2 \end{bmatrix}.$$

Суммирование матриц дает

$$Y_y = Y_y^a + Y_y^{\sigma} = \begin{bmatrix} G_1 + G_2 + s(C_1 + C_2) & -sC_2 \\ -sC_2 - \alpha G_2 & G_3 + sC_2 \end{bmatrix},$$

$$H_U = \frac{\dot{U}_3}{\dot{U}_1} = G_1 \frac{\dot{U}_{(2)}}{\dot{U}_{(1)}} = G_1 \frac{-D_{12}}{D} = G_1 \frac{\alpha G_2 + sC_2}{D}.$$

Опуская преобразования, получаем

$$H_U = G_1 \frac{\alpha G_2 + sC_2}{C_1 C_2 s^2 + [C_2 G_2 (1 - \alpha) + C_2 (G_1 + G_3) + C_1 G_3] s + G_3 (G_1 + G_2)}.$$

8.31. При выборе нормального дерева ИТУТ отнести к ветвям связи (хордам).

8.32. Приняв указанные на рис. 8.32а контуры, уравнения трехполюсного элемента, у которого выводы 1—3 входят в контур 1, а 2—3 — в контур 2, можно записать:

$$\dot{U}_1 = r_{11} \dot{I}_1 + r_{12} \dot{I}_2 = r_{11} \dot{I}_{(1)} - r_{12} \dot{I}_{(2)},$$

$$\dot{U}_2 = r_{21} \dot{I}_1 + r_{22} \dot{I}_2 = r_{21} \dot{I}_{(1)} - r_{22} \dot{I}_{(2)}.$$

- В уравнениях учтены соотношения между токами; $I_1 = I_{(1)}$, $I_2 = -I_{(2)}$. Так как положительные направления \dot{U}_2 и $I_{(2)}$ не совпадают, то, обращая знак второго уравнения, получаем матрицу контурных сопротивлений

$$Z_k^a = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 \\ -r_{21} & r_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(в матрице добавлены 3-я строка и 3-й столбец из нулевых элементов, так как в цепи имеется третий независимый контур, в который не входят выводы трехполюсного элемента).

Матрица цепи из двухполюсных элементов, получающаяся при коротком замыкании выводов трехполюсника, имеет вид

$$Z_k^b = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & R_1 \\ 0 & -j'\omega C_2 & -j\omega C_2 \\ R_1 & -j/\omega C_2 & R_1 - j(1/\omega C_1 + 1'\omega C_2) \end{bmatrix}.$$

Матрица контурных сопротивлений цепи равна сумме найденных матриц:

$$Z_k = Z_k^a + Z_k^b.$$

Для замены трехполюсного элемента схемой с зависимыми источниками используем заданную в условиях матрицу параметров, которая связывает напряжения и токи выводов элемента,

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \text{ или уравнение в развернутой форме}$$

$$\dot{U}_1 = r_{11}\dot{I}_1 + r_{12}\dot{I}_2,$$

$$\dot{U}_2 = r_{21}\dot{I}_1 + r_{22}\dot{I}_2.$$

По записанным уравнениям составляем схему с зависимыми источниками напряжения, управляемыми током (рис. 8.326).

8.33. Формирование уравнений состояния следует производить обычным порядком по схеме, где трехполюсный элемент заменен зависимыми источниками.

8.34. Так как в исходных данных указана матрица проводимостей трехполюсного элемента с общим (базисным) выводом 3 (матрица порядка 2×2 , в индексах отсутствует цифра 3), а в схеме за базисный принят узел 4, то должна быть составлена и использована в дальнейшем неопределенная матрица проводимостей

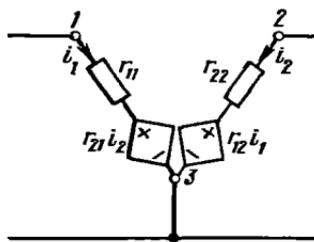


Рис. 8.326

Y_y^a . Эту матрицу составляют по заданной, добавляя 3-ю строку и 3-й столбец элементов, исходя из того, что сумма элементов каждой строки и каждого столбца неопределенной матрицы проводимостей должна быть равна нулю:

$$g_{13} = -(g_{11} + g_{12}); \quad g_{23} = -(g_{21} + g_{22}); \quad g_{31} = -(g_{11} + g_{21}) \text{ и т. д.}$$

Далее следует суммировать матрицы проводимостей Y_y^a и Y_y^b как в задаче 8.30.

8.35. Ознакомиться с указаниями к задаче 8.33.

8.38. Обратит внимание на большое значение входного сопротивления цепи по сравнению с R_3 .

8.41. Так как базисный узел 5 не совпадает ни с одним из зажимов трехполюсных элементов, то должны быть использованы не-

определенные матрицы проводимостей (см. указания к решению задачи 8.34). При суммировании матрицы проводимостей цепи из двухполюсников с неопределенными матрицами трехполюсных элементов следует учитывать, к каким узлам цепи подсоединены их выводы. Так, например, элемент a подсоединен выводом 1 — a к узлу 1, 2 — a — к узлу 4; 3 — a — к узлу 2.

Следовательно, элемент матрицы g_{11}^a должен быть прибавлен к элементу матрицы Y_{11} матрицы пассивной части цепи; элемент g_{12}^a — к элементу Y_{14} , Yg_{13}^a — к элементу Y_{12} и т. д.

8.43. Зависимые источники напряжения следует преобразовать в независимые источники тока.

8.44. Предварительно зависимый источник тока следует преобразовать в зависимый источник напряжения.

Матрицу контурных сопротивлений определяют как сумму трех матриц: подцепи из двухполюсных элементов (при коротком замыкании индуктивно-связанных элементов и зависимого источника напряжения), индуктивно-связанного элемента и зависимого источника. Составление каждой матрицы было рассмотрено при решении предыдущих задач главы.

ГЛАВА 9

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

В задачах гл. 9 использованы следующие обозначения:

$f(t)$ — (оригинал) — функция времени, преобразуемая по Лапласу; $F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$ — [изображение $f(t)$] — функция комплексной переменной $s = \sigma + j\omega$, называемой также комплексной частотой; \mathcal{L} и \mathcal{L}^{-1} — символы прямого и обратного преобразований Лапласа: $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ и $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$; \div — символ соответствия изображения и оригинала.

В выражения оригиналов $f(t)$ введены в виде сомножителей единичные ступенчатые функции $\delta_1(t)$ и $\delta_1(t - \tau)$, определяющие область ненулевых значений оригиналов. Техника использования $\delta_1(t)$ при записи сложных, в том числе разрывных, функций времени, рассмотрена в гл. 5.

9.1м. Заданы две группы 1 и 2 аналитических выражений некоторых функций времени. Для каждого выражения построить качественно соответствующий график, определить изображение функции по Лапласу; для изображений функций группы 1 определить полюсы и отметить их на плоскости комплексной частоты.

1. а) $2e^{-3t}\delta_1(t)$; б) $2te^{-3t}\delta_1(t)$; в) $4\cos 2t\delta_1(t)$;
 г) $4e^{-2t}\cos 4t\delta_1(t)$; д) $10 - 5e^{-3t}\sin 2t\delta_1(t)$;
 е) $4e^{-3t}\cos(3t - 30)\delta_1(t)$.

2. а) $5(t-2)\delta_1(t)$; б) $2(t-2)\delta_1(t-2)$; в) $2t\delta_1(t-2)$;
 г) $2e^{-5t}\delta_1(t-0,2)$; д) $2e^{-4(t-2)}(t-2)\delta_1(t-2)$;
 е) $3e^{-4(t-1)}\cos 5(t-1)\delta_1(t-1)$; ж) $10\cos 10t[\delta_1(t)-\delta_1(t-6,28)]$.

9.2м. На рис. 9.2 даны графики ряда функций. Записать аналитические выражения функций во временной области и определить

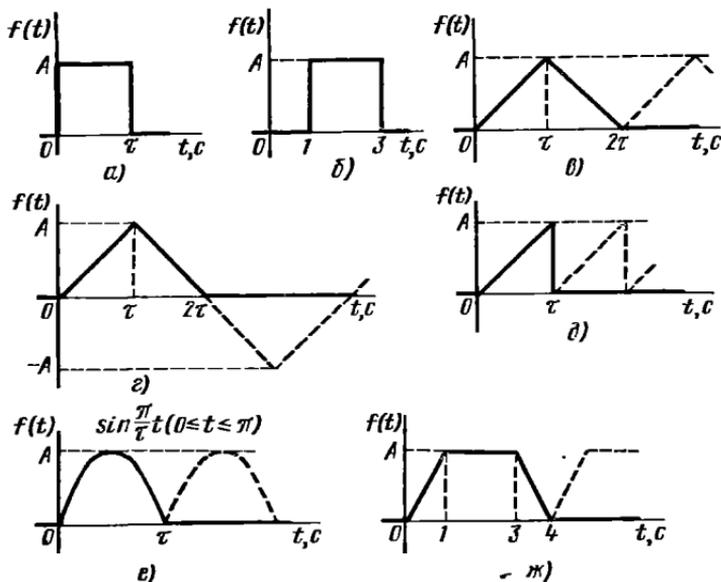


Рис. 9.2

их изображения. Получить изображения периодических функций времени, обозначенных на рис. 9.2, а—ж пунктиром. Принять $A=4$, $\tau=2$ с.

9.3м. Известны изображения некоторых функций времени. Определить полюсы функций, по найденным полюсам установить, какие слагаемые входят в оригиналы функций; найти эти оригиналы.

Заданные изображения:

а) $\frac{3s+4}{s^2+2s}$; б) $\frac{2s^2+5s+2}{s^3+2s^2+s}$; в) $\frac{s+6}{s^2+6s+8}$;

г) $\frac{2s+4}{s^3+2s^2+2s}$; д) $\frac{s^3+8s^2+15s}{(s^2+1)(s^2+4s+8)}$; е) $\frac{3s+4}{s^3+7s^2+14s+8}$;

ж) $\frac{2s^2+7s+7}{s^2+3s+2}$.

9.4м. По изображениям, приведенным в задаче 9.3 (кроме последнего), не переходя к оригиналам $f(t)$, определить $f(0+)$, $f'(0+)$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$, если последний существует.

9.5. По заданным изображениям сигналов найти их оригиналы:

$$1. \frac{2}{s^2} e^{-2s}; \quad 2. \frac{2}{s} \left(2 + \frac{1}{s}\right) e^{-2s}; \quad 3. \frac{2}{(s+4)^2} e^{-2s};$$

$$4. \frac{3s+12}{s^2+8s+41} e^{-s}; \quad 5. \frac{10s}{s^2+100} (1 - e^{-6,28s}); \quad 6. \frac{5}{s^2} (1 - e^{-s})^2.$$

Построить графики найденных оригиналов.

9.6. Используя теорему смещения, найти изображения следующих амплитудно-модулированных сигналов:

$$1. u(t) = e^{-at} \sin \omega_0 t \quad (t > 0);$$

$$2. u(t) = \cos \omega t \sin \omega_0 t \quad (t > 0);$$

$$3. u(t) = t \cos \omega_0 t \quad (t > 0).$$

9.7. Известно, что $\mathcal{L}[\sin \omega_0 t] = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} = F_1(s)$ и $\mathcal{L}[\cos \omega_0 t] = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} = F_2(s)$. Используя операцию дифференцирования и интегрирования $F_1(s)$ и $F_2(s)$ по комплексной частоте s , определить изображения амплитудно-модулированных сигналов

$$i_1(t) = t \cos \omega_0 t, \quad i_2(t) = t \sin \omega_0 t, \quad i_3(t) = \frac{\sin \omega_0 t}{t} \quad (t > 0).$$

9.8. Определить изображения амплитудно-модулированных колебаний вида $f(t) \cos \omega_0 t$, для которых закон изменения модулирующей функции $f(t)$ представлен графиками (одиночные импульсы на рис. 9.2, в, з, е). При нахождении изображений принять $A=1$, $\omega_0 \tau = k \cdot 2\pi$, $k=1, 2, 3, \dots$

9.9р. Структура цепи определяется тройками чисел: 1, 3, 1; 2, 1, 3; 3, 1, 2; 4, 1, 3; 5, 1, 3. Содержание ветвей: 1 — источник постоянного тока $I=3$ А; 2 — $R=2$ Ом; 3 — $L=0,1$ Г; 4 — $C=0,05$ Ф; 5 — последовательное соединение замкнутого ключа и $R_1=1$ Ом. В момент времени $t=0$ ключ размыкается. Найти напряжения всех ветвей цепи.

9.10р. В цепи (рис. 9.10): $U=8$ В, $R=2$ Ом, $L=0,8$ Г, $C=0,05$ Ф. Определить токи всех ветвей цепи после замыкания ключа.

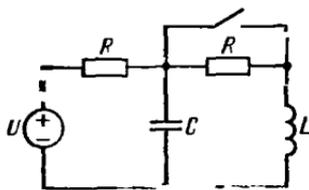


Рис. 9.10

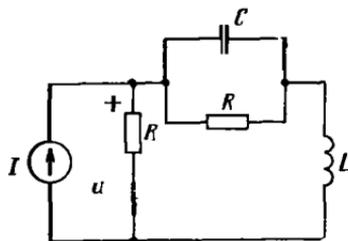


Рис. 9.12

9.11. Решить задачу 4.26, определив операторным методом токи $i_{L1}(t)$ и $i_{L2}(t)$.

9.12. В цепи рис. 9.12 в момент времени $t=0$ размыкается ключ. $I=4$ А, $R=0,5$ Ом, $L=0,5$ Г, $C=1$ Ф. Определить входное напряжение цепи $u(t)$.

9.13. Дана цепь с источниками постоянного напряжения (рис. 9.13) без начального запаса энергии в L и C -элементах. В момент времени $t=0$ ключ замыкается в положении 1, а спустя $t=\pi\sqrt{LC}$ — в положении 2. До какого напряжения будет заряжен C -элемент, если ключ в положении 2 будет находиться в течение $\pi\sqrt{LC}$ с?

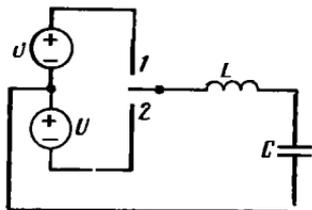


Рис. 9.13

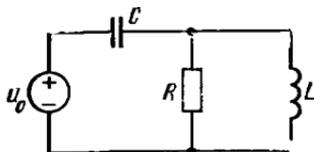


Рис. 9.14

9.14. На цепь (рис. 9.14) действует источник напряжения $u_0(t) = 2t\delta_1(t)$. $R=0,5$ Ом, $L=1$ Г, $C=1$ Ф. Определить входной ток цепи $i(t)$.

9.15. Решить операторным методом задачу 4.31, определив i_L и u_C .

9.16. Решить операторным методом задачу 4.32, определив u_C и i_L .

9.17. Структура цепи задана числами: 1, 4, 1; 2, 1, 4; 3, 1, 2; 4, 2, 4; 5, 2, 3; 6, 3, 4; 7, 3, 4.

Содержание ветвей: 1 — источник тока $i_0 = \sqrt{20} \cos(2t - 26^\circ 30')$; 2 и 6 — $L=0,5$ Г; 3 и 4 — $R=1$ Ом; 5 — замкнутый ключ; 7 — последовательное соединение $C=0,5$ Ф и $R=1$ Ом.

Определить токи L -элементов и напряжение C -элемента после размыкания ключа.

9.18. Решить задачу 7.18 операторным методом.

9.19м. В условиях задачи 4.38 принять $u_0 = 12e^{-3t}\delta_1(t)$; определить напряжения и токи C -элементов.

9.20р. В цепи рис. 9.20 $I=2$ А, $R=2$ Ом, $C_1=0,1$ Ф, $C_2=0,3$ Ф. Определить напряжения и токи C -элементов при замыкании ключа. Рассмотреть процесс при размыкании ключа в момент $t=t_0$, полагая, что к этому времени в цепи наступит установившийся режим. Построить графики найденных реакций. Решить задачу, приняв $C_1=C_2=0,1$ Ф.

9.21. Решить операторным методом задачу 4.40; определить напряжения L -элементов.

9.22. Определить токи ветвей цепи в задаче 4.39, приняв $u_0 = 6e^{-2t}\delta_1(t)$, $i_0 = I_0 = 2$ А.

9.23. В цепи (рис. 9.23) параметры элементов заданы в омах и генри; $U=6$ В: 1) определить токи L -элементов при замыкании ключа в момент $t=0$; 2) найти токи и напряжения L -элементов при размыкании ключа, считая, что после замыкания ключа процесс в цепи установился.

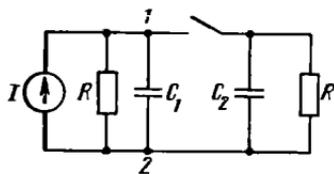


Рис. 9.20

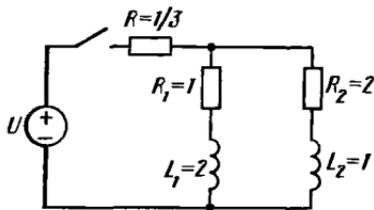
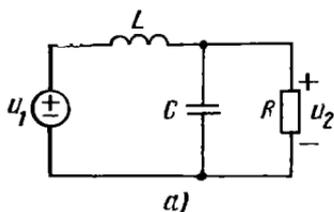


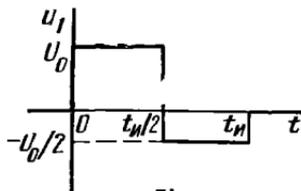
Рис. 9.23

9.24м. Используя метод контурных токов, определить входную и передаточную проводимости в задаче 4.43; вычислить токи L -элементов, приняв $u=4e^{-2t}\delta_1(t)$.

9.25. На цепь (рис. 9.25, а) без запаса энергии с момента $t=0$ действует напряжение, заданное графически (рис. 9.25, б); $L=$



а)



б)

Рис. 9.25

$=4/3$ Гн, $C=0,25$ Ф, $R=1$ Ом, $U_0=2$ В, $t_n=2$ с. Определить функцию цепи $H_U = \frac{U_2(s)}{U_1(s)}$ и найти $u_2(t)$; построить график реакции.

9.26. Структура цепи задана числами 1, 3, 1; 2, 1, 3; 3, 1, 2; 4, 2, 3; содержание ветвей: 1 — источник тока $i_0(t)$; 2 — $R_1=2$ Ом; 3 — $R_2=1$ Ом; 4 — параллельное соединение $C=1/12$ Ф и $L=1,5$ Гн. Предварительный запас энергии отсутствует. Определить функцию

цепи $H_I = \frac{I_{R2}(s)}{I_0(s)}$ и ток L -элемента, если $i_0(t)$ есть импульс прямоугольной формы уровня $I=3$ А и длительностью $t_n=3$ с.

9.27м. Определить функцию $H_I = \frac{I_{R2}(s)}{I_0(s)}$, соответствующие переходную и импульсную характеристики цепи без предварительного запаса энергии, представленной на рис. 9.27; $R_1=R_2=1$ Ом, $L=0,25$ Гн, $C=0,25$ Ф. Вычислить $i_{R2}(t)$, если $i_0(t)=2e^{-4t}\delta_1(t)$.

9.28. Решить задачу 9.27, если $R_1=R_2=1$ Ом, $L=1,707$ Г, $C=0,293$ Ф, а $i_0(t)$ есть импульс треугольной формы (см. рис. 9.2, в)

уровня $I_0=2$ А и длительности $t_n=0,5$ с. Построить график найденной реакции. Как изменится реакция цепи, если длительность импульса увеличить в 10 раз?

9.29м. Цепь (рис. 9.29) характеризуется параметрами: $R=40$ Ом, $L=1$ мкГ, $C=2500$ пФ. Определить функцию цепи $H_I = \frac{I_2(s)}{I_1(s)}$, предварительно пронормировав параметры. Вычислить импульсную характеристику для тока $i_2(t)$.

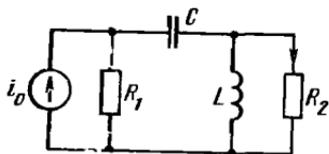


Рис. 9.27

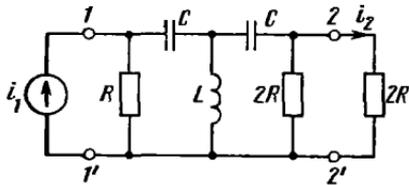


Рис. 9.29

9.30. Определить функцию цепи $H_U = \frac{U_2(s)}{U_1(s)}$ и импульсную характеристику $h_{u2}(t)$ в нормированном виде для цепи, структура которой задана числами 1, 4, 1; 2, 1, 4; 3, 1, 2; 4, 2, 4; 5, 2, 3; 6, 3, 4. Содержание ветвей: 1 — последовательно источник напряжения $u_1(t)$ и R ; 2 — последовательно L и C ; 3 — R ; 4 — C ; 5 — $0,5R$; 6 — $0,5R$. Численные значения параметров: $R=150$ Ом, $L=50$ мкГ, $C=0,02$ мкФ. Напряжение u_2 есть напряжение на ветви 6.

9.31р. Структура цепи задана числами: 1, 5, 1; 2, 1, 2; 3, 2, 4; 4, 4, 3; 5, 2, 3; 6, 4, 5; 7, 3, 5; 8, 3, 5; 9, 5, 3. Содержание ветвей: 1 — источник напряжения $u_0(t) = 10e^{-2t}\delta_1(t)$; 2, 3, 4 и 8 — $R=1$ Ом; 5 — $L=1$ Гн; 6 и 7 — $C=1$ Ф; 9 — источник тока $i_0(t) = 5e^{-3(t-1)}\delta_1 \times (t-1)$. Используя уравнения состояний для изображений, определить $i_{L5}(t)$, $u_{C6}(t)$ и $u_{C7}(t)$.

9.32. Определить напряжения на L и C -элементах цепи, структура которой задана числами: 1, 6, 1; 2, 1, 2; 3, 1, 5; 4, 2, 6; 5, 2, 3; 6, 3, 6; 7, 4, 3; 8, 6, 4; 9, 5, 3. Содержание ветвей: 2, 5, 7, 9 — $R=1$ Ом; 3 — $L=1$ Гн; 4 и 6 — $C=1$ Ф; 1 и 8 — источники напряжения $U_{01}=12$ В и $U_{02}=7$ В. Переходный процесс вызван замыканием в момент времени $t=0$ ключа, включенного параллельно 9-й ветви.

9.33. В цепи (рис. 9.33) в момент времени $t=0$ замыкается ключ. $U=2$ В, $R=1$ Ом, $L=1,5$ Гн, $|M|=0,5$ Гн. Определить токи L -элементов.

9.34. В цепи, представленной на рис. 9.34, $R=3$ Ом, $L=1$ Г, $|M|=0,5$ Гн, $U=6$ В. Определить токи индуктивных элементов после замыкания ключа в момент времени $t=0$.

9.35. На цепь (рис. 9.35) с момента времени $t=0$ действует источник $I_0=10$ А. Определить токи ветвей и входное напряжение цепи.

9.36 На рис. 9.36 представлена схема цепи; параметры на схеме указаны в омах и генри. Определить токи индуктивных элементов после размыкания ключа; $U=4$ В, $I=4$ А.

9.37. В цепи (рис. 9.37) в момент $t=0$ замыкается ключ; $u(t) = 25 \cos 2t$, $R=3$ Ом, $L=2$ Г, $|M|=1$ Гн. Определить токи L -элементов.

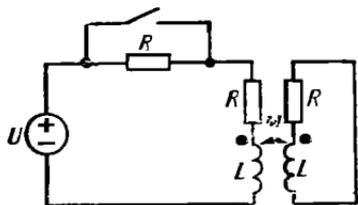


Рис. 9.36

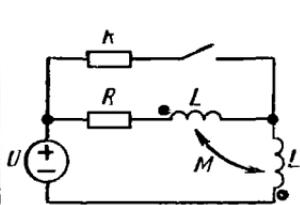


Рис. 9.34

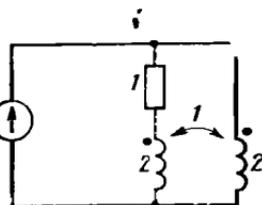


Рис. 9.35

9.38. В условиях задачи 8.30 принять $R_1=R_2=R_3=1$ Ом, $C_1=C_2=1$ Ф, $\alpha=0,99$. Определить $u_3(t)$, если $u_1=5e^{-3t}\delta_1(t)$.

9.39м. В задаче 8.39 принять $R_1=R_2=1$ Ом, $C_3=\sqrt{2}$ Ф, $C_4=0,5\sqrt{2}$ Ф, $k_U=3$ и определить u_2 , если на вход цепи подается импульс напряжения прямоугольной формы амплитудой $U_1=1$ В и длительностью $t_{\text{н}}=3$ с.

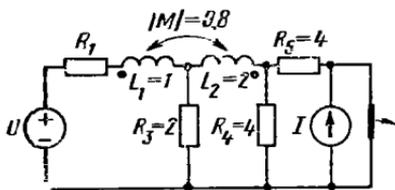


Рис. 9.36

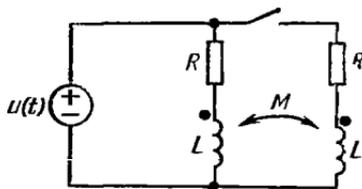


Рис. 9.37

Установить, при каких значениях C_4 цепь будет неустойчивой; как влияет k_U на устойчивость цепи. При исследовании влияния C_4 (k_U) на устойчивость остальные параметры полагать неизменными и равными заданным.

9.40. С двухполюсной цепью без запаса энергии были проведены два опыта.

1. На цепь действовал импульс напряжения $\delta(t)$; при $t>0$ входной ток двухполюсника определялся выражением $i(t)=A_1e^{-2t} \times \cos(2t+\alpha_1)$.

2. На цепь действовал импульс тока $\delta(t)$; при $t>0$ входное напряжение определялось выражением $u(t)=A_2e^{-t} \cos(3t+\alpha_2) + A_3e^{-2t}$.

Найти входное сопротивление цепи, если на постоянном токе оно равно $Z(s)|_{s=0}=Z(0)=0,5$ Ом.

9.41. При напряжении на входе цепи без запаса энергии $u(t) = [2e^{-2t} - 0,5e^{-t} - 1,5e^{-3t}]\delta_1(t)$, входной ток $i(t) = te^{-2t}\delta_1(t)$. Опреде-

лить напряжение $u(t)$, если $i(t) = \cos 2t \delta_1(t)$. Найти импульсную характеристику цепи.

9.42. Двухполюсная цепь при нулевых начальных условиях подключается к источнику напряжения $u(t) = \sin 2t \delta_1(t)$. Изображение тока цепи $I(s) = \frac{s^2 + 2s + 4}{s^4 + 2s^3 + 9s^2 + 8s + 20}$. Определить ток в установившемся синусоидальном режиме и переходную характеристику цепи.

9.43. Две двухполюсные цепи без запаса энергии соединены последовательно и включены под действие напряжения $u(t) = 4te^{-2t} \delta_1(t)$. На одном двухполюснике, сопротивление которого $Z_1(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+8}$, напряжение $u_1(t) = [e^{-2t} - \sqrt{2}e^{-2t} \cos(2t + 45^\circ)] \delta_1(t)$. Определить сопротивление другого двухполюсника.

9.44р. Периодически изменяющиеся напряжения (рис. 9.44, а—з) в момент времени $t=0$ подаются на вход цепей без запаса энергии (рис. 9.44, д, е). Найти указанные на схемах реакции в

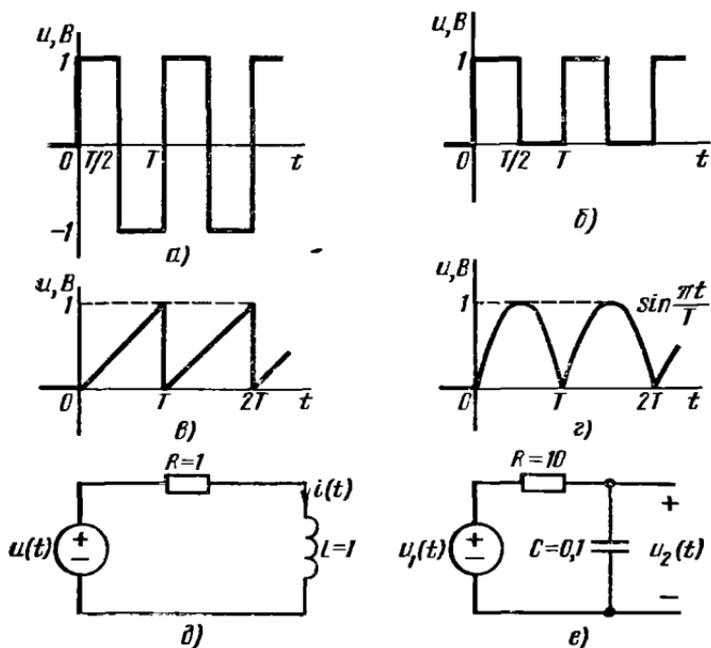


Рис. 9.44

установившемся периодическом режиме, приняв период $T=1$ с. Параметры элементов цепей указаны на схемах в омах, генри и фарадах.

9.45. Даны четыре элемента $R_1=R_2=1$ Ом, $L=1$ Гн, $C=1$ Ф. Составить из них цепь, у которой полюса функции входного сопротивления имели бы наибольшие по абсолютной величине значения вещественной части.

9.46. Считая заданными в области $t > 0$ графики входного напряжения и входного тока некоторого двухполюсника без запаса энергии, предложить метод определения входного сопротивления двухполюсника (в операторной форме).

РЕШЕНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

9.1. При определении изображений большинства функций группы 2 необходимо использовать теорему запаздывания; целесообразно предварительно построить график функции. Функцию $2t\delta_1(t-2)$ можно представить в виде $f(t) = 4\delta_1(t-2) + 2(t-2)\delta_1(t-2)$; ее изображение $F(s) = \left(\frac{4}{s} + \frac{2}{s^2}\right)e^{-2s}$.

9.2. Для отыскания изображений необходимо представить заданные одиночные импульсы как совокупность (последовательность) элементарных функций, запаздывающих относительно друг друга во времени. Например, импульс (см. рис. 9.2, ∂) выражается функцией $f_{\text{и}}(t) = 2t\delta_1(t) - 2(t-2)\delta_1(t-2) - 4\delta_1(t-2)$, которой соответствует изображение $F_{\text{и}}(s) = \frac{2}{s^2}(1 - e^{-2s}) - \frac{4}{s}e^{-2s}$.

9.3. Обратить внимание на то, что в выражении (ж) степени полинома числителя и знаменателя равны. При переходе к оригиналу необходимо выделить целую часть дроби $K_{\text{ц}} = \lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 2$, которой будет соответствовать в области оригиналов слагаемое $2\delta(t)$, где $\delta(t)$ — единичная импульсная функция.

9.4. Для решения необходимо использовать теоремы о предельных значениях:

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s); \quad f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s); \quad f'(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s[sF(s) - f(0^+)].$$

9.9. По условиям задачи изображаем схему цепи (рис. 9.9, a). Независимые начальные условия $i_L(0^-) = I \frac{R}{R + R_1} = 2A$, $u_C(0^-) = R_1 i_L(0^-) = 2V$ устанавливаются непосредственно по схеме после короткого замыкания L -элемента и размыкания ветви с C -элементом, так как в цепи действует источник постоянного тока.

Составляем операторную схему замещения с источниками тока, имея в виду использования метода узловых напряжений (рис. 9.9, b).

По методу узловых напряжений

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{(1)}(s) \\ U_{(2)}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{(1)}(s) \\ I_{(2)}(s) \end{bmatrix},$$

где

$$Y_{11} = 1/R + 1/sL = \frac{0,5s + 10}{s}; \quad Y_{22} = 1/sL + sC = \frac{0,05s^2 + 10}{s};$$

$$Y_{12}=Y_{21}=-\frac{1}{sL}=-\frac{10}{s}; \quad I_{(1)}(s)=\frac{I}{s}-\frac{i_L(0-)}{s}=\frac{1}{s};$$

$$I_{(2)}(s)=\frac{i_L(0-)}{s}+Cu_C(0-)=\frac{0,1s+2}{s}.$$

Решая систему уравнений, получаем:

$$U_1(s)=2\frac{s^2+20s+600}{s(s^2+20s+200)}; \quad U_{(2)}(s)=2\frac{s^2+40s+600}{s(s^2+20s+200)};$$

$$U_L(s)=U_{(1)}(s)-U_{(2)}(s)=\frac{-40}{s^2+20s+200} =$$

$$= \frac{-40}{(s+10-j10)(s+10+j10)},$$

так как полюсы полинома знаменателя $s_{1,2}=-\delta \pm j\omega_c = -10 \pm j10$.

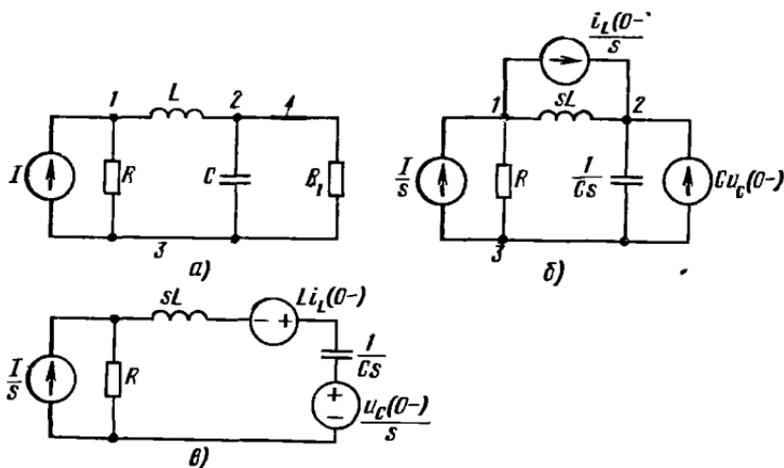


Рис. 9.9

Определяем вычет в первом полюсе

$$K_1 = \lim_{s \rightarrow s_1} (s - s_1) U_L(s) = \frac{-40}{s+10+j10} \Big|_{s=-10+j10} =$$

$$= \frac{-40}{+j20} = 2e^{j90^\circ} = |K_1|e^{j\alpha_{K_1}}.$$

Оригинал функции

$$u_L(t) = 2|K_1|e^{-\delta t} \cos(\omega_c t + \alpha_{K_1}) = 4e^{-10t} \cos(2t + 90^\circ).$$

При переходе к оригиналу в случае комплексных полюсов можно также использовать соотношение

$$u_L(t) = 2 \operatorname{Re} [(s - s_1) U_L(s)] e^{s_1 t} \Big|_{s=s_1 = -\delta + j\omega_c}.$$

Напряжения остальных ветвей определяются аналогично:

$$u_R(t) = \mathcal{L}^{-1}[U_{(1)}(s)] = 6 - 4\sqrt{2}e^{-10t} \cos t - 45^\circ,$$

$$u_C(t) = \mathcal{L}^{-1}[U_{(2)}(s)] = 6 - 4e^{-10t} \cos 10t.$$

Независимые начальные условия в операторной схеме замещения можно также учесть источниками напряжения (рис. 9.9, в). Преобразовав источник тока в эквивалентный источник напряжения, получаем уравнение $(R + sL + \frac{1}{sC})I_L(s) = R\frac{I}{s} + Li_L(0-) - \frac{u_C(0-)}{s}$, откуда $I_L(s) = I_C(s) = 2 \frac{s+20}{s^2+20s+200} \cdot 2\sqrt{2}e^{-10t} \cos \times 10t - 45^\circ$.

Для того чтобы перейти к изображениям напряжений, следует использовать соотношения:

$$U_R(s) = \left[\frac{I}{s} - I_L(s) \right] R; \quad U_C(s) = \frac{1}{sC} I_C(s) + \frac{u_C(0-)}{s};$$

$$U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0-).$$

9.10. Изображения реакций в данной задаче имеют двукратный полюс $s_1 = -5$. В частности $I_L(s) = 2 \frac{s^2 + 12,5s + 50}{(s+5)^2 \cdot s}$. Данное изображение следует представить в виде

$$I_L(s) = \frac{K_{11}}{(s+5)^2} + \frac{K_{12}}{s+5} + \frac{K_2}{s},$$

где

$$K_{11} = (s+5)^2 I_L(s) \Big|_{s=-5} = -5,$$

$$K_{12} = \frac{d}{ds} [(s+5)^2 I_L(s)] \Big|_{s=-5} = -2,$$

$$K_2 = sI_L(s) \Big|_{s=0} = 4.$$

Тогда оригинал функции $i_L(t) = K_{11}^t te^{st} + K_{12}e^{st} + K_2e^{st} = -5te^{-5t} - 2e^{-5t} + 4$.

9.19. Обратит внимание на то, что напряжения C -элементов претерпевают разрыв непрерывности, а их токи содержат импульсные составляющие.

9.20. Независимые начальные условия $u_{C1}(0-) = R_1 I = 4$ В, $u_{C2}(0-) = 0$ учитываем, вводя в схему замещения источник тока $C_1 u_{C1}(0-)$, включенного параллельно C_1 и направленного к узлу 1 (рисунок не приводится). Приняв узел 2 за базисный по методу узловых напряжений имеем

$$[2R + s(C_1 + C_2)] U_{(1)}(s) = I/s + C_1 u_{C1}(0-).$$

Из уравнения находим

$$U_{(1)}(s) = U_{C1}(s) = -U_{C2}(s) = I \frac{C_1 R}{C_1 + C_2} \cdot \frac{s + 1/C_1 R}{s \left[s + \frac{2}{(C_1 + C_2) R} \right]} =$$

$$= \frac{s + 5}{s(s + 2,5)}.$$

Переходя к оригиналу, получаем

$$u_{C1}(t) = u_{C2}(t) = (2 - e^{-2,5t}) \delta_1(t).$$

В данной задаче напряжения C -элементов претерпевают разрыв непрерывности:

$$u_{C1}(0+) = u_{C2}(0+) = 1 \text{ В}; \quad u_{C1}(0-) = 4 \text{ В}; \quad u_{C2}(0-) = 0;$$

токи C -элементов: $I_{C1}(s) = sC_1 U_{(1)}(s) - C_1 u_{C1}(0-) = 0,1 \frac{s+5}{s+2,5} - 0,4$ (первое слагаемое имеет целую часть); $i_{C1}(t) = -0,3\delta(t) + 0,25e^{-2,5t}\delta_1(t)$. Аналогично $I_{C2}(s) = sC_2 U_{(1)}(s) = 0,3 \frac{s+5}{s+2,5} \div i_{C2} = 0,3\delta(t) + 0,75e^{-2,5t}\delta_1(t)$.

К моменту $t=t_0$ переходный процесс завершится, причем $u_{C1}(t_0) = u_{C2}(t_0) = 2$ В. При размыкании ключа цепь распадается на две цепи первого порядка каждая; процессы в них протекают независимо, причем напряжения C -элементов изменяются непрерывно:

$$u_{C1} = [4 - 2e^{-5(t-t_0)}] \delta_1(t-t_0); \quad u_{C2} = 2e^{-1,667(t-t_0)} \delta_1(t-t_0),$$

при $C_1 = C_2 = 0,1$ Ф $u_{C1}(t) = u_{C2}(t) = 2\delta_1(t)$, $i_{C1}(t) = -0,2\delta(t)$, $i_{C2}(t) = 0,2\delta(t)$.

9.24. Обратить внимание на то, что рассматриваемая цепь является цепью третьего порядка, в то время как число конечных полюсов функций цепи равно двум. Это объясняется наличием контура, составленного из одних индуктивных элементов.

9.27. В данной задаче функцию цепи проще всего определить методом пропорциональных величин. От $H_I(s)$ к импульсной и переходной характеристикам следует переходить по соотношениям

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H_I(s)]; \quad h_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[H_I(s)/s].$$

9.29. Выражение функции цепи имеет вид

$$H_I(s) = \frac{0,25s^3}{s^3 + (1/RC + R/2L)s^2 + \frac{1}{LC}s + \frac{1}{2LRC^2}};$$

подставляя численные значения параметров, получаем

$$H_I(s) = \frac{0,25s^3}{s^3 + 3 \cdot 10^7 s^2 + 4 \cdot 10^4 s + 2 \cdot 10^{21}}.$$

Выражение $H_I(s)$ можно упростить, если вести расчет в нормированных (относительных) величинах. Нормирование выполняют по уровню и частоте; при этом можно выбирать базисные величины R_6 и s_6 из условия максимального сближения по порядку значений величин (относительных) всех параметров цепи.

Расчетные формулы: $R_* = R/R_6$, $L_* = \omega_6 L/R_6$, $C_* = \omega_6 C R_6$, где знаком $\ll * \gg$ обозначены нормированные величины.

В рассматриваемой задаче удобно принять: $R_6 = R = 40$ Ом, $s_6 = \omega_6 = \frac{1}{LC} = 2 \cdot 10^7$ 1/с. При этих значениях базисных величин получается: $R_* = 1$, $C_* = 2$, $L_* = 0,5$. Заметим, что подобный выбор базисных величин не является единственно возможным.

Передаточная функция в нормированных величинах

$$H_*(s_*) = \frac{0,25s_*^3}{s_*^3 + 1,5s_*^2 + s_* + 0,25}$$

Это выражение более удобно для последующих вычислений.

Полюсы функций (нормированные) $s_{1*} = -0,5$; $s_{23*} = -0,5 \pm j0,5$. Импульсная характеристика $h_*(t_*) = \mathcal{L}^{-1}[H_{I*}(s_*)] = 0,25\delta(t_*) - 0,125e^{-0,5t_*} - 0,25\sqrt{2}e^{-0,5t_*} \cos(0,5t_* + 45^\circ)$.

Для перехода к истинному (ненормированному) выражению необходимо подставить вместо $t_* \rightarrow \omega_6 t$ и умножить все выражение на $1/R_6$, если $H(s)$ имеет размерность проводимости; на R_6 , если $H(s)$ имеет размерность сопротивления. Если $H(s)$ величина безразмерная (как в задаче), множитель равен единице.

В данном случае $h(t) = 0,25\delta(t) - 0,125e^{-10^7 t} - 0,25\sqrt{2}e^{-10^7 t} \times \cos(10^7 t + 45^\circ)$.

9.31. Уравнения состояния для рассматриваемой цепи имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{di_{L5}}{dt} &= -\frac{R}{2L} i_{L5} + \frac{1}{2L} u_{C6} - \frac{1}{L} u_{C7} + \frac{1}{2L} u_0 = \\ &= -0,5i_{L5} + 0,5u_{C6} - u_{C7} + 0,5u_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{du_{C6}}{dt} &= -\frac{1}{2C} i_{L5} - \frac{1,5}{RC} u_{C6} + \frac{1}{RC} u_{C7} + \frac{1}{2C} u_0 = \\ &= -0,5i_{L5} - 1,5u_{C6} + u_{C7} + 0,5u_0, \end{aligned}$$

$$\frac{du_{C7}}{dt} = \frac{1}{C} i_{L5} + \frac{1}{RC} u_{C6} - \frac{2}{RC} u_{C7} + \frac{1}{C} i_0 = i_{L5} + u_{C6} - 2u_{C7} + i_0$$

(вывод уравнений состояния не приводится; порядок их формирования рассмотрен в гл. 4 и 8).

Так как начальные условия в цепи нулевые, то уравнения состояния для изображений в матричной форме имеют вид $s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$, где

$$X(s) = \begin{bmatrix} I_{L5}(s) \\ U_{C6}(s) \\ U_{C7}(s) \end{bmatrix} \text{ — вектор изображений переменных состояния цепи;}$$

$$Y(s) = \begin{bmatrix} U_0(s) \\ I_0(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{s+2} \\ \frac{5}{s+3} e^{-s} \end{bmatrix} \text{ — вектор изображений воздействующих функций;}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{2L} & \frac{1}{2L} & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{2C} & -\frac{1,5}{RC} & \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{C} & \frac{1}{RC} & -\frac{2}{RC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,5 & -1 \\ -0,5 & -1,5 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ — матрица параметров;}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2L} & 0 \\ \frac{1}{2C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ — матрица управления.}$$

Изображения переменных состояния в матричной форме определяются выражением $X(s) = [s \cdot \mathbf{1} - A]^{-1} B Y(s)$, где

$$s\mathbf{1} - A = \begin{bmatrix} s+0,5 & -0,5 & 1 \\ 0,5 & s+1,5 & -1 \\ -1 & -1 & s+2 \end{bmatrix}.$$

$$\det |s\mathbf{1} - A| = s^3 + 4s^2 + 5s + 2 = (s+2)(s+1)^2 = D.$$

Обратная матрица отыскивается по известным правилам. В данном случае она имеет вид

$$[s\mathbf{1} - A]^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

где A_{ik} — алгебраическое дополнение определителя $\det |s\mathbf{1} - A|$ для элемента i -строки и k -столбца;

$$A_{11} = (s+1,5)(s+2) - 1 = s^2 + 3,5s + 2;$$

$$A_{22} = (s+0,5)(s+2) + 1 = s^2 + 2,5s + 2;$$

$$A_{33} = (s+0,5)(s+1,5) + 0,25 = s^2 + 2s + 1;$$

$$A_{21} = 0,5(s+2) - 1 = 0,5s;$$

$$A_{31} = 0,5 - s - 1,5 = -(s + 1);$$

$$A_{12} = -0,5(s + 2) + 1 = -0,5; \quad A_{32} = A_{23} = A_{13} = s + 1;$$

$$BY(s) = \begin{bmatrix} 0,5U_0(s) \\ 0,5U_0(s) \\ I_0(s) \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$X(s) = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} 0,5U_0(s)(A_{11} + A_{21}) + A_{31}I_0(s) \\ 0,5U_0(s)(A_{12} + A_{22}) + A_{32}I_0(s) \\ 0,5U_0(s)(A_{13} + A_{23}) + A_{33}I_0(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{L5}(s) \\ U_{C6}(s) \\ U_{C7}(s) \end{bmatrix}.$$

Обратное преобразование Лапласа $\mathcal{L}^{-1}[X(s)]$ дает выражение переменных состояния.

В частности

$$\begin{aligned} i_{L5}(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{(A_{11} + A_{21})0,5}{(s + 1)^2(s + 2)} U_0(s) \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{A_{31}}{(s + 1)^2(s + 2)} I_0(s) \right] = \\ &= \mathcal{L}^{-1} \frac{(s^2 + 4s + 2)5}{(s + 1)^2(s + 2)^2} + \mathcal{L}^{-1} \frac{5e^{-s}}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)} = \\ &= [20e^{-t} - 5te^{-t} - 20e^{-2t} - 10te^{-2t}] \delta_1(t) - [2,5e^{-(t-1)} - 5e^{-2(t-1)} + \\ &\quad + 2,5e^{-3(t-1)}] \delta_1(t-1). \end{aligned}$$

9.39. Выражение полинома знаменателя $H_U(s)$ имеет вид $R_1R_2C_3C_4s^2 + [(R_1 + R_2)C_3 - (K_U - 1)R_1C_4]s + 1$.

Если выполняется условие $(R_1 + R_2)C_3 - (K_U - 1)R_1C_4 < 0$, то корни полинома (полюсы функции передачи) будут располагаться в правой полуплоскости комплексной частоты; наличие таких полюсов обуславливает неустойчивость цепи.

9.44. Рассматриваем действие сигнала на рис. 9.44, z на цепь рис. 9.44, e . Изображение полной реакции цепи

$$U_2(s) = \frac{U_1(s)}{1 - e^{-sT}} H_U(s),$$

где

$$U_1(s) = \frac{\pi/T}{s^2 + (\pi/T)^2} (1 + e^{-sT}) - \text{изображение входного сигнала в пределах первого периода; } H_U(s) = \frac{1}{1 + RCs} - \text{функция передачи по напряжению.}$$

Полная реакция цепи при воздействии одного импульса входного сигнала определяется выражением

$$\begin{aligned} u_{21}(t) &= \mathcal{L}^{-1}[U_1(s)H_U(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\pi/T}{s^2 + (\pi/T)^2} \cdot \frac{1}{1 + sRC} \cdot (1 + e^{-sT}) \right] = \\ &= u'_{21}(t) \delta_1(t) + u'_{21}(t - T) \delta_1(t - T). \end{aligned}$$

Из двух составляющих интерес представляет лишь $u'_{21}(t)\delta_1(t)$, которая существует при $t \geq 0$; вторая составляющая $u'_{21}(t-T) \times \delta_1(t-T)$ равна нулю при $t < T$. Следовательно, в пределах первого периода $0 \leq t \leq T$ полная реакция

$$\begin{aligned} u_{21}(t) &= u'_{21}(t)\delta_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\pi/T}{s^2 + (\pi/T)^2} \cdot \frac{1}{1 + sRC} \right] = \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\pi}{(s+1)(s-j\pi)(s+j\pi)} \right] = \frac{\pi}{1+\pi^2} e^{-t} + \\ &+ \frac{1}{1+\pi^2} \sin(\pi t - 72,3^\circ) = 0,289 e^{-t} + 0,303 \sin(\pi t - 72,3^\circ). \end{aligned}$$

Свободная составляющая реакции определяется полюсами функции цепи; в нашем случае единственный полюс $s_1 = -\frac{1}{RC} = -1$,

$$\begin{aligned} u_{2св}(t) &= \lim_{s \rightarrow s_1} [(s+1)U_2(s)] e^{s_1 t} = \frac{\pi}{s^2 + \pi^2} \cdot \frac{1 + e^{-s}}{1 - e^{-s}} \Big|_{s=s_1=-1} e^{-t} = \\ &= \frac{\pi}{1+\pi^2} \cdot \frac{1+e}{1-e} e^{-t} = -0,625 e^{-t}. \end{aligned}$$

Периодическая составляющая реакции равна $u_{2в}(t) = u_{21}(t) - u_{2св}(t) = 0,303 \sin(\pi t - 72,3^\circ) + 0,914 e^{-t}$. Выражение справедливо на интервале $t \div t+T$.

ГЛАВА 10

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА

10.1р. Для периодической последовательности сигналов (рис. 10.1, а—д) требуется: 1) найти коэффициенты разложения в ряд Фурье; 2) построить амплитудный и фазовый спектры; 3) записать сигналы в виде ряда Фурье с конечным числом членов (в соответствии с шириной спектра сигналов, за которую принять диапазон частот, в пределах которого амплитуды гармоник превышают 10% от наибольшей амплитуды гармоники); 4) построить графики сигналов после их аппроксимации рядом Фурье с конечным числом членов; 5) определить действующие значения напряжений, используя разложение в ряд Фурье, а также непосредственно, по заданным сигналам.

10.2. Последовательный RLC -контур подключен к источнику периодического напряжения, напряжение которого изменяется по закону рис. 10.1, в; $t_{п} = \pi$ с, $U_m = 2$ В. Параметры контура: $R = 1$ Ом, $L = 1$ Гн, $C = 1/9$ Ф.

Воспользовавшись выполненным в задаче 10.1 разложением в ряд Фурье, определить: 1) мгновенные значения токов и напряже-

ний на элементах контура; 2) коэффициенты искажения кривых тока и напряжений*. Построить амплитудные и фазовые спектры найденных тока и напряжений.

10.3. Дана цепь (рис. 10.3): $R_1=1$ Ом, $L=1$ Гн, $R_2=3$ Ом, $C=1/3$ Ф. Периодическое напряжение $u_1(t)$ задано графиком (рис.

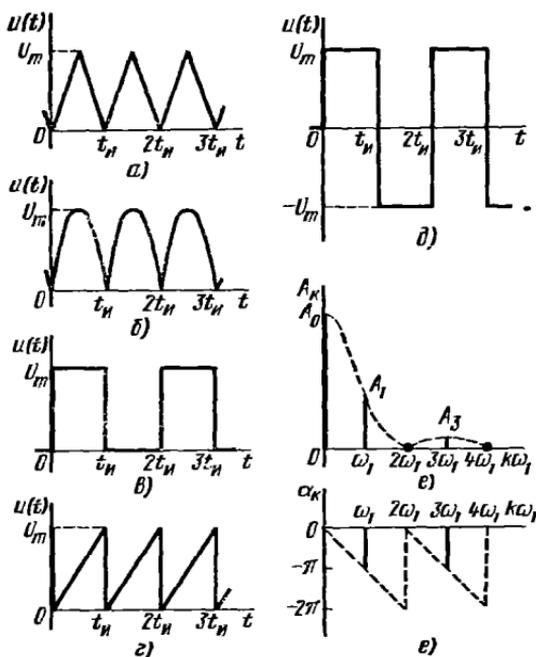


Рис. 10.1

рис. 10.1, б), $U_m=2$ В, $t_n=\pi$ с. Определить $i_1(t)$ и $u_2(t)$, а также действующие значения I_1 и U_2 .

10.4р. Даны напряжение и ток двухполюсника:

$$u(t) = 100 + 50 \cos \omega t + 20 \cos(3\omega t + \pi/6) + 10 \cos(5t - \pi/3),$$

$$i(t) = 2 + 10 \cos(3\omega t - \pi/6) + 4 \cos 5t.$$

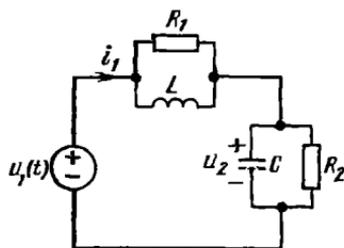


Рис. 10.3

Определить активную и полную мощности, мощность искажения и коэффициент мощности λ .

10.5. Даны напряжение и ток двухполюсника:

$$u = 10 + 50 \cos(\omega t - 20^\circ) + 20 \cos(3\omega t + 60^\circ) + 6 \cos(5\omega t + 40^\circ) + 8 \cos(7\omega t - 90^\circ);$$

$$i = 6 \cos(\omega t - 80^\circ) + 3 \cos 3\omega t + \cos(5\omega t - 8^\circ) + 2 \cos(7\omega t - 90^\circ).$$

Определить 1) амплитуды эквивалентных синусоид напряжения и тока; 2) угол сдвига фаз между ними.

10.6р. Дана цепь (рис. 10.6): $R_1=2$ Ом, $R_2=6$ Ом, $\omega L=3$ Ом, $1/\omega C=6$ Ом, $u=12+10\sqrt{2} \cos(\omega t-45^\circ)+6\sqrt{2} \cos(3\omega t+35^\circ)$. Определить токи и напряжения всех элементов цепи (мгновенные и действующие значения). Найти активную и полную мощности источника и коэффициент мощности λ .

* Коэффициентом искажения называют отношение действующего значения первой гармоники ряда Фурье к действующему значению периодического напряжения или тока.

10.7. В цепи (рис. 10.7) $R=1$ Ом, $1/\omega C=1$ Ом, $\omega L=0,5$ Ом, $i(t)=10+10\sqrt{2}\cos\omega t$. Определить: 1) токи и напряжения (мгновенные и действующие значения) всех элементов цепи; 2) активную и полную мощности источника; 3) коэффициент мощности.

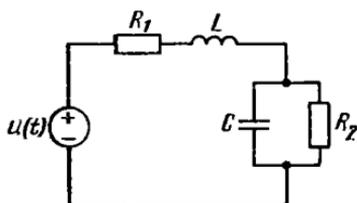


Рис. 10.6

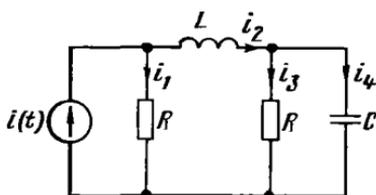


Рис. 10.7

10.8. В цепи (рис. 10.8) $R_1=1$ Ом, $R_2=2$ Ом, $\omega L=2$ Ом, $\omega L_1=3$ Ом, $1/\omega C=6$ Ом, $u(t)=3+3\sqrt{2}\cos\omega t+3\sqrt{2}\cos 2\omega t$. Определить: 1) токи и напряжения (мгновенные и действующие значения)

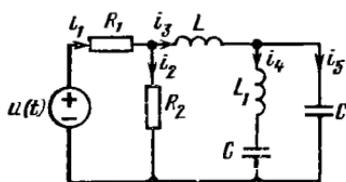


Рис. 10.8

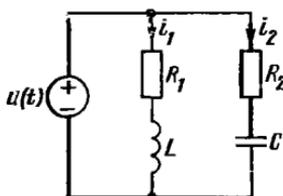


Рис. 10.9

всех элементов цепи; 2) активную и полную мощность источника; 3) коэффициент мощности λ .

10.9. Дана цепь (рис. 10.9): $u(t)=100\cos\omega t+60\cos 3\omega t+20\cos 5\omega t$; $R_1=R_2=4$ Ом; $\omega L=1/\omega C=3$ Ом.

В какой из ветвей потребляемая мощность будет больше? Определить мощности, потребляемые в ветвях.

10.10. Последовательно с приемником включен реактивный двухполюсник — фильтр (рис. 10.10), $L_1=L_2=1$ мГ. Определить C_1 и C_2 , при которых этот двухполюсник не будет пропускать в приемник пятую гармонику тока и не будет оказывать сопротивления третьей гармонике, если частота основной гармоники $f=1$ кГц.

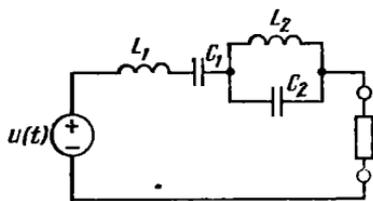


Рис. 10.10

10.11. К параллельному RLC-контур приложено напряжение, состоящее из гармоник первого и второго порядков, при этом амплитуды этих гармоник равны. Действующие значения первых гар-

моник токов в элементах контура следующие: $I_{R1}=3$ А, $I_{L1}=8$ А, $I_{C1}=4$ А. Определить действующее значение тока источника.

10.12. На вход линейного трансформатора (рис. 10.12, а) подается периодическая последовательность импульсов напряжения прямоугольной формы (рис. 10.12, б); $U_m=100$ В, $T=3,14$ с, $R_1=R_2=6$ Ом, $L_1=L_2=0,5$ мГ, $M=0,2$ мГ. Определить напряжение на вторичной обмотке трансформатора.

10.13р. Для одиночных сигналов, графики которых показаны на рис. 10.13, а—е, определить амплитудные и фазовые спектры, построить их графики и найти ширину спектров.

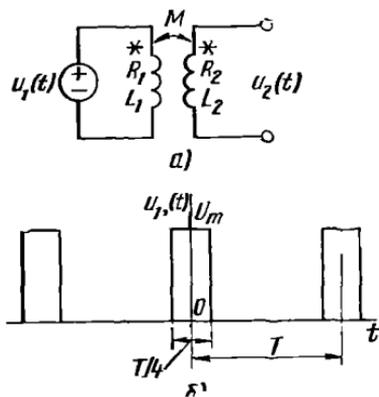


Рис. 10.12

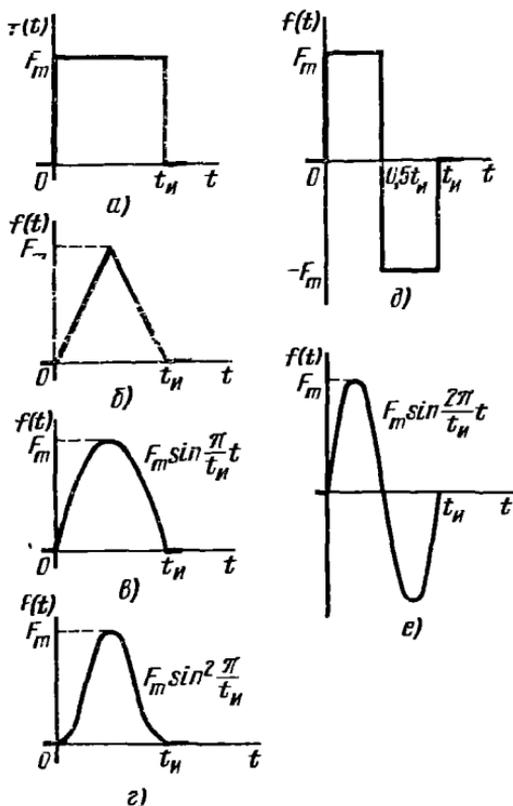


Рис. 10.13

10.14. Определить амплитудные и фазовые спектры радиопульсов $f_1(t) = f(t) \cos \omega_{\text{н}}(t)$ с огибающими $f(t)$, изображенными на рис. 10.13, при $\omega_{\text{н}} = 20\pi/t_{\text{н}}$. Найти ширину спектров.

10.15. Определить спектры (амплитудный и фазовый) для двух сигналов: а) видеопульса — $u(t) = 10e^{-10t}\delta_1(t)$; б) радиопульса — $u(t) = 10e^{-10t} \sin 200t\delta_1(t)$. Определить ширину спектров в обоих случаях.

10.16. На вход дифференцирующей RC -цепи ($R=100$ кОм, $C^*=0,1$ мкФ) подаются два экспоненциальных сигнала: а) $u_1(t) = 10e^{-10t}\delta_1(t)$ и б) $u_2(t) = 10e^{-100t}\delta_1(t)$.

Требуется: 1) сравнить спектры этих сигналов с частотными характеристиками цепи, дать качественную оценку точности дифференцирования в обоих случаях; 2) найти $u_2(t)$.

10.17. Одноточные сигналы тока (рис. 10.13) с амплитудой $I_m = F_m = 2$ А поступают на вход цепи рис. 7.8. Определить: 1) амплитудные и фазовые спектры входного тока; 2) спектры выходного $i_1(t)$ сигнала.

Сравнить спектры входного и выходного сигналов и дать качественное заключение об ожидаемых искажениях при прохождении сигнала через цепь. Задачу решить для двух случаев: а) $t_{\text{н}} = 6,28 \cdot 10^{-6}$ с; б) $t_{\text{н}} = 62,8 \cdot 10^{-6}$ с.

10.18. Решить задачу 10.17 для цепи рис. 7.9.

10.19р. Найти энергетический спектр импульса тока экспоненциальной формы $i(t) = I_m e^{-\alpha t} \delta_1(t)$ и определить его ширину. Построить кривую распределения энергии в спектре.

10.20. Построить энергетические спектры сигналов, показанных на рис. 10.13, а, г, и сравнить их ширину. Построить графики распределения энергии импульса в спектре.

10.21. На рис. 10.21 изображены вещественные частотные спектры двух сигналов. Найти эти сигналы.

10.22. Используя данные задачи 10.17 определить $i_1(t)$ по вещественному частотному спектру.

10.23. Можно ли на выходе линейной цепи с сосредоточенными и постоянными во времени параметрами получить прямоугольный импульс напряжения, подавая на вход цепи ступенчатое напряжение?

10.24. Дано $u = 20\sqrt{2} \cos 1000t + U_{mh} \cos k1000t$, где k — целое число. Предложите схему двухполюсной цепи и методику измерений, позволяющие определить величины U_{mh} и k только при помощи вольтметра.

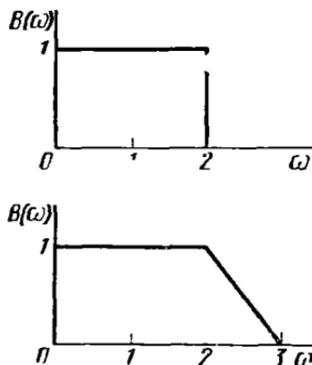


Рис. 10.21

РЕШЕНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

10.1. При разложении периодической функции в ряд Фурье удобно воспользоваться связью между коэффициентами ряда Фурье и изображением по Лапласу первого периода заданной функции. Известно, что

$$A_k = \frac{2}{T} F_1(s) \Big|_{s=jk\omega_1},$$

где T — период заданной функции; ω_1 — частота первой гармоники; $F_1(s)$ — изображение функции, совпадающей с заданной на интервале $0 \leq t \leq T$ и равной нулю вне этого интервала; $k=0, 1, 2, 3, \dots$

Так для напряжения (см. рис. 10.1, а)

$$U_1(s) = \frac{2U_m}{s^2 t_{\text{н}}} \left(1 - e^{-\frac{st_{\text{н}}}{2}} \right),$$

тогда

$$A_k = \left(\frac{8U_m}{\omega^2 t_n} \sin^2 \frac{\omega t_n}{4} \right) e^{-\frac{j\omega t_n}{2}}.$$

Отсюда получаем составляющие амплитудного и фазового спектров:

$$A_0 = U_m; \quad A_1 = \frac{4}{\pi^2} U_m = 0,405 U_m; \quad A_2 = 0;$$

$$A_3 = \frac{4}{9\pi^2} U_m = 0,045 U_m; \quad \alpha_1 = -\pi; \quad \alpha_3 = -\pi.$$

По этим данным на рис. 10.1, е построены амплитудный и фазовый спектры.

Следовательно, заданное напряжение может быть аппроксимировано отрезком ряда Фурье

$$u(t) \approx \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^3 A_k \cos(k\omega_1 t + \alpha_k) =$$

$$= 0,5 U_m + 0,405 U_m \cos(\omega t - \pi) + 0,045 U_m \cos(3\omega t - \pi).$$

Действующее значение напряжения по коэффициентам ряда Фурье

$$U = \sqrt{\left(\frac{A_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n A_k^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{U_m}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} (0,405^2 U_m^2 + 0,045^2 U_m^2)} = 0,576 U_m;$$

непосредственно по заданной функции

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt} = \frac{U_m}{\sqrt{3}} = 0,577 U_m.$$

Коэффициенты:

амплитуды

$$k_a = U_m / U = \sqrt{3};$$

формы

$$k_\phi = U / U_{cp} = 2U / A_0 = 2U_m / \sqrt{3} U_m = 2 / \sqrt{3} = 1,15;$$

искажения

$$k_n = U_1 / U = A_1 / \sqrt{2} U = \frac{4U_m}{\sqrt{2} \pi^2 U_m} = 0,389,$$

10.4. Активная мощность

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 + U_5 I_5 \cos \varphi_5 = 260 \text{ Вт.}$$

Полная мощность $S = UI$,

$$\text{где } U = \sqrt{U_0^2 + \frac{1}{2}(U_{1m}^2 + U_{3m}^2 + U_{5m}^2)} = 107,2 \text{ В,}$$

$$I = \sqrt{I_0^2 + \frac{1}{2}(I_{3m}^2 + I_{5m}^2)} = 7,87 \text{ А.}$$

Следовательно, $S = 843 \text{ В} \cdot \text{А}$.

Реактивная мощность

$$Q = U_1 I_1 \sin \varphi_1 + U_3 I_3 \sin \varphi_3 + U_5 I_5 \sin \varphi_5 = 69,3 \text{ вар.}$$

Мощность искажения $T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = 798,9 \text{ В} \cdot \text{А}$.

Коэффициент мощности $\lambda = P/UI = 0,308$.

10.6. Найдем ток источника i_1 . Комплексные амплитуды гармоник тока $I_{km} = \dot{U}_{km} / \underline{Z}_k$, где \dot{U}_{km} — комплексные амплитуды гармоник напряжения источника, \underline{Z}_k — входное сопротивление цепи.

$$\begin{aligned} \underline{Z}_k &= R_1 + jk\omega L + \frac{\frac{1}{jk\omega C} R_2}{\frac{1}{jk\omega C} + jR_2} = R_1 + jk\omega L + \frac{R_2}{1 + jk\omega C R_2} = \\ &= 2 + j3k + \frac{6}{1 + jk}. \end{aligned}$$

Для постоянной составляющей ($k=0$) $U_0 = 12 \text{ В}$, сопротивление $\underline{Z}_0 = R_1 + R_2 = 8 \text{ Ом}$ (C — элемент — разомкнутая ветвь; L — элемент — коротко замкнутая ветвь); следовательно, $i_{1,0} = U_0 / Z_0 = 1,5 \text{ А}$.

Для первой гармоники ($k=1$) $u_1 = 10 \sqrt{2} \cos(\omega t - 45^\circ)$, комплексная амплитуда $\dot{U}_{1m} = 10 \sqrt{2} e^{-j45^\circ}$. Сопротивление на частоте первой гармоники $\underline{Z}_1 = 2 + j3 + \frac{6}{1 + j} = 5$; $\varphi_1 = 0$ (резонанс для первой гармоники); $i_{1,1m} = \frac{\dot{U}_{1m}}{\underline{Z}_1} = 2 \sqrt{2} e^{-j45^\circ}$; и $2 \sqrt{2} \cos(\omega t - 45^\circ)$.

Для третьей гармоники ($k=3$)

$$u_3 = 6 \sqrt{2} \cos(3\omega t + 35^\circ), \quad \dot{U}_{3m} = 6 \sqrt{2} e^{j35^\circ},$$

$$\underline{Z}_3 = 2 + j9 + \frac{6}{1 + j3} = 2,6 + j7,2 = 7,78 e^{j71^\circ 50'}, \quad \varphi_3 = 71^\circ 50',$$

$$i_{1,3m} = \frac{\dot{U}_{3m}}{\underline{Z}_3} = 0,77 \sqrt{2} e^{-j36^\circ 50'}, \quad i_{1,3} = 0,77 \sqrt{2} \cos(3\omega t - 36^\circ 50').$$

$$i_1 = i_{1,0} + i_{1,1} + i_{1,3} = 1,5 + \sqrt{2} \cos(\omega t - 45^\circ) + \\ + 0,77 \sqrt{2} \cos(3\omega t - 36,50^\circ);$$

действующее значение тока

$$I = \sqrt{I_{1,0}^2 + I_{1,1}^2 + I_{1,3}^2} = \sqrt{1,5^2 + 2^2 + 0,77^2} = 2,62 \text{ А};$$

активная мощность

$$P = U_0 I_{1,0} + U_1 I_{1,1} \cos \varphi_1 + U_3 I_{1,3} \cos \varphi_3 = 36,9 \text{ Вт};$$

действующее значение напряжения источника

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_3^2} = 16,72 \text{ В};$$

полная мощность S и коэффициент мощности λ

$$S = UI = 43,8 \text{ В} \cdot \text{А}, \quad \lambda = P/S = 0,904.$$

Определение токов и напряжений остальных элементов цепи выполняется аналогично.

10.13. Найдем спектры импульсного сигнала (см. рис. 10.13, в). Известно, что спектральная плотность сигналов, для которых $f(t) = 0$ при $t < 0$, $F(j\omega) = F(s) |_{s=j\omega}$, где $F(s)$ — изображение по Лапласу заданного сигнала. В данном случае

$$F(s) = \frac{F_m \frac{\pi}{t_n}}{s^2 + (\pi/t_n)^2} (1 + e^{-st_n}).$$

Тогда

$$F(j\omega) = \left(\frac{2F_m \frac{\pi}{t_n}}{(\pi/t_n)^2 - \omega^2} \cos \frac{\omega t_n}{2} \right) e^{-j \frac{\omega t_n}{2}}.$$

Отсюда амплитудный спектр

$$|F(j\omega)| = \frac{2F_m \frac{\pi}{t_n}}{\left| \left(\frac{\pi}{t_n} \right)^2 - \omega^2 \right|} \left| \cos \frac{\omega t_n}{2} \right|.$$

Фазовый спектр $\alpha_F(\omega) = -\frac{\omega t_n}{2}$, если в $F(j\omega)$ выражение в круглых скобках положительно, и $\alpha_F(\omega) = \frac{\omega t_n}{2} + \pi$, если это выражение отрицательно.

Численные значения спектров для нескольких значений ω приведены в табл. 10.1, а графики этих спектров — на рис. 10.13ж.

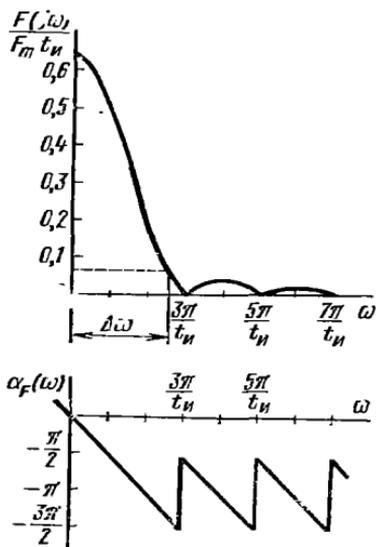


Рис. 10.13ж

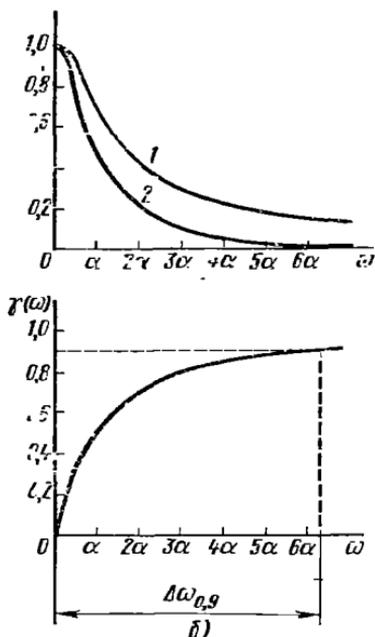


Рис. 10.19

Таблица 10.1

| ω | 0 | π/t_m | $2\pi/t_m$ | $3\pi/t_m$ | $4\pi/t_m$ | $5\pi/t_m$ | $6\pi/t_m$ | $7\pi/t_m$ |
|--------------------------------|-------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $\frac{ F(j\omega) }{F_m t_m}$ | 0,637 | 0,5 | 0,212 | 0 | 0,042 | 0 | 0,018 | 0 |
| $\alpha_F(\omega)$ | 0 | $-\pi/2$ | $-\pi$ | — | $-\pi$ | — | $-\pi$ | — |

10.19. Известно, что энергию, выделяемую импульсным сигналом $f(t)$ в сопротивлении $R=1$ Ом, можно определить, используя формулу Рейли [1].

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F^2(\omega) d\omega, \text{ где } F(\omega) = |F(j\omega)| \text{ и } F^2(\omega) \text{ — ам-}$$

плитудный и энергетический спектры сигналов. В данном случае

$$I(\omega) = \frac{I_m}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} = \frac{I_m}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/a)^2}},$$

$$I^2(\omega) = \frac{I_m^2}{a^2} \cdot \frac{1}{1 + (\omega/a)^2}.$$

На рис. 10.19, *a* построены оба спектра в относительных единицах $I(\omega)/I(0)$ — кривая 1 и $I^2(\omega)/I^2(0)$ — кривая 2. Под шириной энергетического спектра понимают диапазон частот, в котором сосредоточено 90% энергии импульса. Поэтому целесообразно найти и построить график распределения энергии в спектре

$$\gamma(\omega) = \frac{W(\omega)}{W} = \frac{\frac{1}{\pi} \int_0^{\omega} F^2(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\alpha}.$$

На рис. 10.19, *б* построена зависимость $\gamma(\omega)$, откуда видно, что 90% энергии сосредоточено в диапазоне частот $\Delta\omega_{0,9} = 6,3\alpha$.

ГЛАВА 11 ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

В задачах данной главы положительные направления напряжений и токов приняты в соответствии с рис. 11.0; пары выводов, которыми четырехполюсник соединяется с источниками нагрузкой, обозначены 1—1' и 2—2'. Предполагается, что напряжения, токи, сопротивления (проводимости) четырехполюсника, если не сделаны соответствующие оговорки, даны в операторной форме, символ s для сокращения записей опускается (например, I вместо $I(s)$).

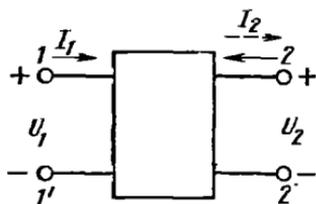


Рис. 11.0

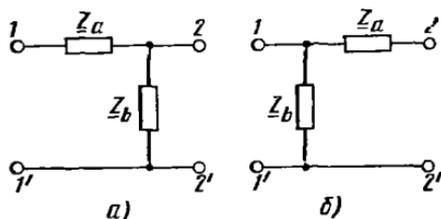


Рис. 11.1

Используются параметры z , y , a и h ; направление тока, показанное на рис. 11.0 пунктиром, применяется для параметров a (параметров передачи).

11.1р. Для Г-образных структур (рис. 11.1) определить z -, a -, y - и h -параметры. Проверить выполнение условий обратимости. Считая, что в схеме рис. 11.1, *a* продольное звено (Z_a) образовано С-элементом; поперечное (Z_b) — R-элементом, а в схеме рис. 11.1, *б* — соответственно С-элементом и L-элементом, найти z -, y -, a - и h -параметры в установившемся синусоидальном режиме.

11.2р. Считая, что четырехполюсники, представленные в задаче 11.1, нагружены на $Z_H = 1/Y_H = 1$, a параметры имеют значения $L =$

$=1 \text{ Г}$, $C=1 \text{ Ф}$, $R=1 \text{ Ом}$, определить выражения функций цепи U_2/U_1 , I_2/I_1 и входного сопротивления. Построить качественно АЧХ и ФЧХ функций передачи.

11.3. Приняв численные значения параметров элементов четырехполюсников в задаче 11.1 $L=1 \text{ Г}$, $C=1 \text{ Ф}$, $R=1 \text{ Ом}$; определить характеристические параметры Z_{c1} , Z_{c2} , γ (для установившегося синусоидального режима).

11.4р. Определить z -, y - и a -параметры симметричных T , Π и скрещенной структур (рис. 11.4, a — $в$). Для каждой из структур

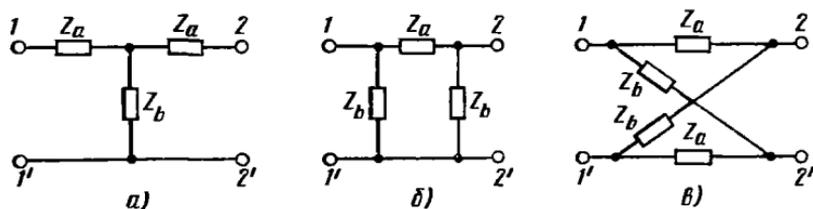


Рис. 11.4

выразить Z_a и Z_b через z -, y - и a -параметры (определить условия эквивалентности).

11.5. Приняв $Z_a=sL$, $Z_b=1/sC$ и $Z_a=1/sC$, $Z_b=R$, по данным задачи 11.4 определить H_U для структуры T и H_I для структуры Π . Задавшись $L=1 \text{ Г}$, $C=1 \text{ Ф}$, $R=1 \text{ Ом}$, изобразить картину нулей и полюсов найденных функций цепи и построить качественно АЧХ и ФЧХ функций. Определить характеристические параметры Z_c и γ для установившегося синусоидального режима.

11.6р. Для симметричной скрещенной системы, нагруженной на $Z_{н1}=1$ (рис. 11.4, $в$) принять: 1) $Z_a=sL=0,5s$, $Z_b=1/sC=1/s$ и 2) $Z_a=1/sC=1/s$, $Z_b=R=1$. Определить H_U , H_I и входное сопротивление, изобразить картину нулей и полюсов функций и построить качественно АЧХ и ФЧХ.

11.7. Сколько и каких измерений необходимо выполнить для определения в установившемся синусоидальном режиме z -, y -, a - и h -параметров четырехполюсников. Изменится ли число необходимых измерений, если исследуемый четырехполюсник является симметричным?

11.8м. На вход симметричного четырехполюсника, нагруженного на резистивный элемент с известным сопротивлением $R_{н1}$, подается напряжение $u_1(t) = U_m \cos \omega t$ и измеряется напряжение на нагрузке U_2 . Затем, изменяя величину $R_{н1}$, повторяют опыт. Сколько потребуется провести подобных опытов для определения y -параметров четырехполюсника на частоте ω ? Как по данным измерений вычислить эти параметры?

Можно ли подобными опытами получить необходимые данные для определения y -параметров несимметричного четырехполюсника?

11.9м. Выразить y -параметры четырехполюсника через z - и a -параметры; a -параметры — через z - и y -параметры и h -параметры — через y - и a -параметры.

11.10м. Входное сопротивление некоторого симметричного обратимого четырехполюсника в установившемся синусоидальном режиме ($\omega = 1$ рад/с) при разомкнутых выводах $2-2'$ $Z_{1x} = 0,6 + j0,2$; при замкнутых накоротко выводах $2-2'$ $Z_{1к} = 0,5 + j0,5$. Определить a -параметры четырехполюсника и параметры эквивалентной Π -схемы.

11.11м. Для симметричного обратимого четырехполюсника в установившемся синусоидальном режиме при $\omega = 1$ рад/с $a_{12} = -j3$, $a_{21} = j$. Определить параметры элементов эквивалентных T - и Π -схем замещения.

11.12. Заданы a -параметры некоторого четырехполюсника, определенные для $\omega = 10^3$ рад/с $[a] = \begin{bmatrix} 1 - j30 & -30 - j20 \\ -j0,1 & -1 \end{bmatrix}$. При каком сопротивлении нагрузки Z_H напряжение и ток выводов $1-1'$ будут совпадать по фазе?

11.13м. Дан неуравновешенный четырехполюсник (рис. 11.13), для которого известна матрица y -параметров. К зажимам $1-2$ подключается резистивный элемент R . Определить U_R/U_1 .

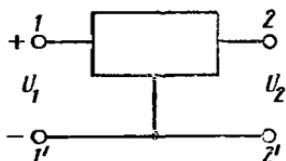


Рис. 11.13

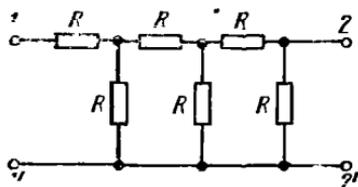


Рис. 11.14

11.14м. Определить a -параметры четырехполюсника, представленного на рис. 11.14; $R = 1$ Ом. Найти параметры эквивалентных T - и Π -структур.

11.15р. На рис. 11.15 дана схема четырехполюсника; $R = 1$ Ом,

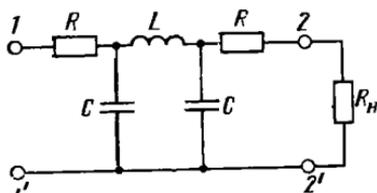


Рис. 11.15

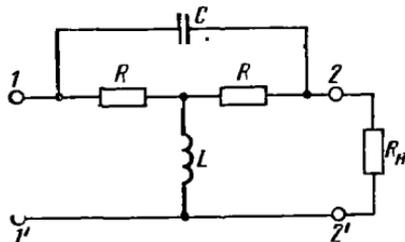


Рис. 11.16

$L=1$ Гн, $C=1$ Ф. Определить a -параметры четырехполюсника и найти при $R_H=1$ Ом функции передачи H_U и H_I . Вычислить характеристические параметры в установившемся синусоидальном режиме при $\omega=2$ рад/с.

11.16. Определить y -параметры четырехполюсника «перекрытой» T-структуры (рис. 11.16) и получить функцию H_U ; $R=10$ Ом, $L=1$ Гн, $C=0,01$ Ф. Вычислить H_U для $R_H=2$ Ом и $\omega=10$ рад/с.

11.17. На рис. 11.17 представлена схема четырехполюсника, нагруженного на резистивный элемент $R_H=0,5$ Ом, $R=1$ Ом, $C=1$ Ф. Определить функцию цепи H_U .

11.18р. Два одинаковых симметричных обратимых четырехполюсника с параметрами $a_{11}=1+s$, $a_{12}=s+2$ соединены каскадно. Определить H_U , H_I и входные сопротивления всей системы и каждого из входящих в нее четырехполюсников, если выходной четырехполюсник нагружен двухполюсником $Z_H=1$.

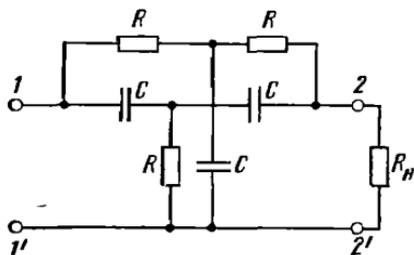


Рис. 11.17

11.19м. Матрица a -параметров некоторого четырехполюсника равна $[a]=\begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ 0,5s & 1 \end{bmatrix}$. Какие a -параметры должен иметь другой четырехполюсник, чтобы, будучи включенным каскадно после первого, он вместе с ним образовал симметричную структуру?

11.20. При каком соотношении между a -параметрами двух симметричных четырехполюсников их каскадное соединение образует симметричный четырехполюсник? Укажите, какие соединения симметричных четырехполюсников заведомо являются симметричными структурами.

11.21. Доказать, что входное сопротивление резистивной цепи любой структуры не может уменьшаться при увеличении сопротивления любой из ее ветвей.

11.22м. Матрица a -параметров некоторого четырехполюсника при частоте ω равна $[a]=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Является ли данный четырехполюсник симметричным?

11.23. Параметры двухобмоточного трансформатора: $L_1=2$ Гн, $R_1=1$ Ом, $L_2=1$ Гн, $R_2=1$ Ом, $|M|=0,5$ Гн. Определить H_U и H_I , используя z - и a -параметры трансформатора, приняв, что сопротивление нагрузки $R_H=2$ Ом.

11.24м. Определить a -параметры для цепей (рис. 11.24), если $L=1$ Гн, $C=0,5$ Ф, а коэффициент магнитной связи $K=0,5$. Найти выражения H_U .

11.25. На рис. 11.25 даны две схемы каскадного соединения идеального трансформатора с коэффициентом трансформации n и

четыреполюсника, для которого известны a -параметры. Определить для каждой схемы входное сопротивление, если к выводам 2—2' подключена нагрузка Z_H .

11.26м. Записать матрицы a -параметров идеального трансформатора и идеального гиратора; определить входное сопротивление

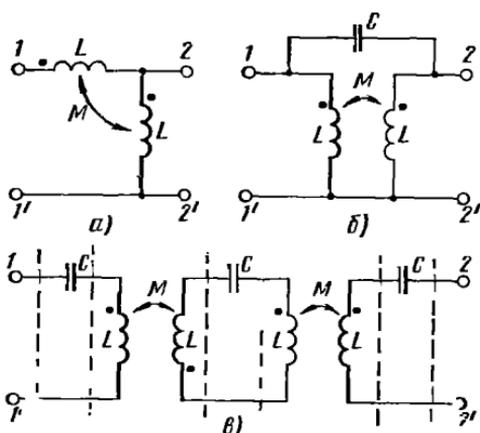


Рис. 11.24

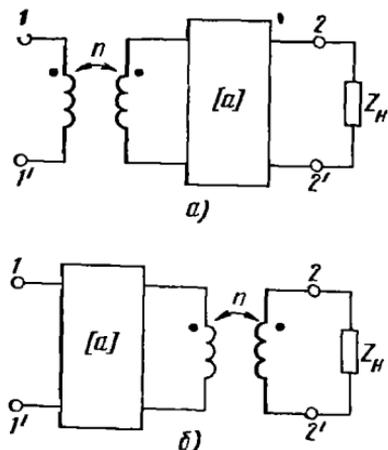


Рис. 11.25

указанных элементов при их нагрузке на сопротивление Z_H . Найти a -параметры каскадного соединения двух идеальных гираторов и сравнить их с a -параметрами идеального трансформатора.

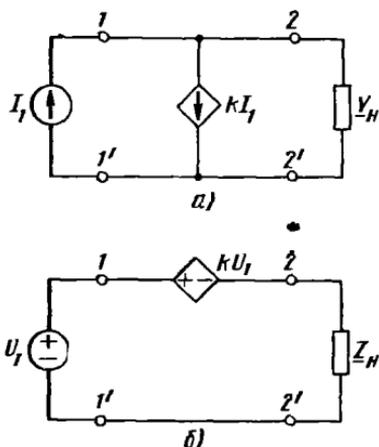


Рис. 11.27

11.27. Определить входную проводимость и входное сопротивление четырехполюсных цепей, представленных на рис. 11,27, а, б.

11.28р. Схема четырехполюсника дана на рис. 11.28. Определить a -параметры, H_U и H_I четырехполюсника при произвольной нагрузке R_H , включенной к выводам 2—2'.

11.29. Определить z - и h -параметры T-образной схемы замещения транзистора на низких частотах (рис. 11.29).

11.30 Определить y - и h -параметры Π -образной высокочастотной схемы замещения транзистора (рис. 11.30).

11.31. Найти z -параметры и функцию H_U четырехполюсника, нагруженного на $Z_H=R_H$ (рис. 11.31).

11.32. Определить матрицу a -параметров нагруженного на C-элемент четырехполюсника, у которого при любой частоте вход-

ное сопротивление будет равно $R_{вх}$. Возможна ли реализация такого четырехполюсника элементами R , L и C ?

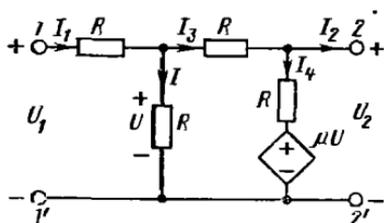


Рис. 11.28

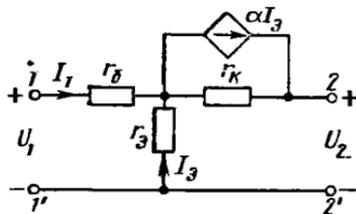


Рис. 11.29

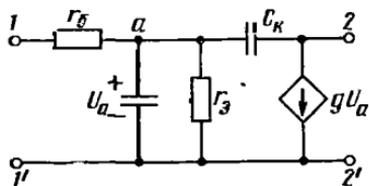


Рис. 11.30

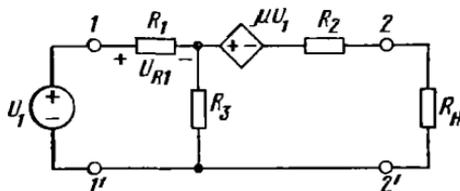


Рис. 11.31

РЕШЕНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

11.1. Матрицы параметров можно получить при рассмотрении схемы четырехполюсника и использовании законов Кирхгофа; полученные уравнения приводят к системе уравнений четырехполюсника в любой форме. Определить параметры можно, используя режимы холостого хода или короткого замыкания соответствующих пар выводов четырехполюсника. Например, для схемы рис. 11.1, б

$$U_1 = U_2 + Z_a I_2 \quad \text{и} \quad I_1 = \frac{U_1}{Z_b} + I_2 = \frac{U_2}{Z_b} + \left(1 + \frac{Z_a}{Z_b}\right) I_2.$$

Так как в системе a -параметров уравнения имеют вид

$$U_1 = a_{11} U_2 + a_{12} I_2,$$

$$I_1 = a_{21} U_2 + a_{22} I_2,$$

то, сопоставляя записанные соотношения, получаем матрицу a -параметров

$$[a] = \begin{bmatrix} 1 & Z_a \\ 1/Z_b & 1 + Z_a/Z_b \end{bmatrix}.$$

Четырехполюсник обратим, так как выполняется условие $|a| = 1$. Определим a -параметры еще раз по режимам холостого хода и короткого замыкания выводов 2—2':

$$a_{11} = U_1/U_2|_{I_2=0} = 1,$$

$$\text{так как } U_1 = U_2;$$

$$a_{12} = U_1/I_2|_{U_2=0} = Z_a,$$

$$\text{так как } U_1 = Z_a I_2;$$

$$a_{21} = I_1/U_2|_{I_2=0} = 1/Z_b,$$

$$\text{так как } I_1 = \frac{1}{Z_b} U_2;$$

$$a_{22} = I_1/I_2|_{U_2=0} = 1 + Z_a/Z_b,$$

$$\text{так как } I_1 = I_2(1 + Z_a/Z_b).$$

Находим z -параметры четырехполюсника:

$$U_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 = Z_b I_1 + Z_b I_2,$$

$$U_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 = Z_b I_1 + (Z_a + Z_b) I_2,$$

следовательно,

$$[z] = \begin{bmatrix} Z_b & Z_b \\ Z_b & Z_a + Z_b \end{bmatrix}.$$

Параметры матрицы $[z]$ можно определить по опытам холостого хода выводов 2—2' и 1—1':

$$z_{11} = U_1/I_1|_{I_2=0} = Z_b, \quad \text{так как } U_1 = Z_b I_1;$$

$$z_{12} = U_1/I_2|_{I_1=0} = Z_b, \quad \text{так как } U_1 = Z_b I_2;$$

$$z_{21} = U_2/I_1|_{I_2=0} = Z_b, \quad \text{так как } U_2 = Z_b I_1;$$

$$z_{22} = U_2/I_2|_{I_1=0} = (Z_a + Z_b), \quad \text{так как } U_2 = (Z_a + Z_b) I_2.$$

Аналогично находят y -параметры; для этого рассматривают режимы короткого замыкания выводов 1—1' и 2—2':

$$y_{11} = I_1/U_1|_{U_2=0} = 1/Z_a + 1/Z_b, \quad \text{так как } I_1 = U_1/Z_b + U_1/Z_a;$$

$$y_{12} = I_1/U_2|_{U_1=0} = -1/Z_a, \quad \text{так как } I_1 = (-1/Z_a) U_2;$$

$$y_{21} = I_2/U_1|_{U_2=0} = -1/Z_a, \quad \text{так как } I_2 = -(1/Z_a) U_1;$$

$$y_{22} = I_2/U_2|_{U_1=0} = 1/Z_a, \quad \text{так как } I_2 = (1/Z_a) U_2,$$

следовательно,

$$[y] = \begin{bmatrix} 1/Z_a + 1/Z_b & -1/Z_a \\ -1/Z_a & 1/Z_a \end{bmatrix}.$$

Для обратимых четырехполюсников $y_{12} = y_{21}$, $z_{12} = z_{21}$.

Уравнения в h -параметрах

$$U_1 = h_{11}I_1 + h_{12}U_2,$$

$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}U_2.$$

$$h_{11} = U_1/I_1|_{U_2=0} = \frac{Z_a Z_b}{Z_a + Z_b}, \quad \text{так как } U_1 = \frac{Z_a Z_b}{Z_a + Z_b} I_1;$$

$$h_{12} = U_1/U_2|_{I_1=0} = \frac{Z_b}{Z_a + Z_b}, \text{ так как } U_1 = \frac{Z_b}{Z_a + Z_b} U_2;$$

$$h_{21} = I_2/I_1|_{U_2=0} = -\frac{Z_b}{Z_a + Z_b}, \text{ так как } I_2 = -\frac{Z_b}{Z_a + Z_b} I_1;$$

$$h_{22} = I_2/U_2|_{I_1=0} = \frac{1}{Z_a}, \text{ так как } I_2 = \frac{1}{Z_a} U_2.$$

Для обратимых четырехполюсников $h_{12} = -h_{21}$.

Необходимо иметь в виду, что направление тока I_2 для различных параметров четырехполюсника принимается различным: для z -, y - и h -параметров оно указано сплошной стрелкой, для a -параметров — пунктирной (рис. 11.0).

11.2. Функцию цепи H_U удобно выражать через y - или a -параметры

$$H_U = \frac{1}{Y_H a_{12} + a_{11}} = \frac{-y_{21}}{Y_H + y_{22}}. \quad (11.1)$$

Из решения предыдущей задачи имеем

$$a_{12} = Z_a = 1/sC = 1's; \quad a_{11} = 1;$$

$$y_{21} = -1/Z_a = -sC = -s; \quad y_{22} = sC = s.$$

Применяя (11.1) получаем

$$H_U = \frac{s}{s+1}.$$

Для определения H_I целесообразно использовать z - и a -параметры

$$H_I = \frac{1}{a_{21}Z_H + a_{22}}; \quad H_I = \frac{-z_{21}}{Z_H + z_{12}}$$

(выражения, вычисленные по приведенным соотношениям, будут различаться знаком из-за противоположных направлений тока I_2 в обеих группах параметров).

Через a -параметры получаем

$$a_{21} = 1'Z_b = 1/Ls = 1s; \quad a_{22} = 1 + Z_a/Z_b = 1 + 1/s^2;$$

$$H_I = \frac{s^2}{s^2 + s + 1}.$$

Входное сопротивление со стороны выводов $I-I'$ выражаем через a -параметры

$$Z_{I-I'} = \frac{a_{11}Z_H + a_{12}}{a_{21}Z_H + a_{22}} = \frac{s(s+1)}{s^2 + s + 1}.$$

Для качественного (без подробных расчетов) построения частотных характеристик целесообразно определить значения функций при частотах $s = j\omega = 0$ и $s \rightarrow \infty$. Это можно выполнить по схеме, но удобнее вычислить значения нулей и полюсов функции.

Для функции $H_I = \frac{s^2}{s^2 + s + 1}$ имеем: нули $\dot{s}_1 = \dot{s}_2 = 0$, по-

люса $s_2 = -0,5 \pm j0,5\sqrt{3}$. Следовательно, передачи сигнала не будет при $\omega = 0$, так как при этой частоте ветвь с C -элементом следует разомкнуть, а L -элемент замкнуть накоротко. При $s = j\omega \rightarrow \infty$ следует, что $H_I|_{s \rightarrow \infty} \rightarrow 1$. По схеме это соответствует замыканию накоротко ветви с C -элементом и размыканию ветви с L -элементом. Таким образом, получены предельные значения АЧХ функции передачи по току, т. е. $|H_I|_{s=j\omega}$. При определении предельных значений ФЧХ следует иметь в виду следующее: каждый конечный (не равный нулю) нуль или полюс при $\omega = 0$ дает значение ФЧХ, равное нулю, а при $\omega \rightarrow \infty$ соответственно $\pi/2$ и $-\pi/2$ (в радианной мере). Нуль или полюс в начале координат дает при любой частоте значение ФЧХ $\pi/2$ и $-\pi/2$. В рассматриваемом примере при $\omega = 0$ значение ФЧХ равно π радиан, а при $\omega \rightarrow \infty$ значение ФЧХ стремится к нулю.

11.4. Определяем a -параметры для скрещенной структуры (см. рис. 11.4, в)

$$a_{11} = U_1/U_2|_{I_2=0} = \frac{Z_a + Z_b}{Z_b - Z_a}, \quad \text{так как } U_2 = U_1 \frac{Z_b - Z_a}{Z_a + Z_b},$$

что следует из уравнения по ЗНК для контура, включающего выводы 2—2', двухполюсники Z_a и Z_b ; $a_{12} = U_1/I_2|_{U_2=0} = \frac{2Z_a Z_b}{Z_b - Z_a}$,

так как при коротком замыкании выводов 2—2'

$$I_1 = \frac{U_1}{2 \frac{Z_a Z_b}{Z_a + Z_b}}, \quad \text{а } I_2 = I_1 \frac{Z_b}{Z_a + Z_b} - I_1 \frac{Z_a}{Z_a + Z_b} = \frac{U_1}{\frac{2Z_a Z_b}{Z_b - Z_a}};$$

$$a_{21} = I_1 U_2|_{I_1=0} = \frac{2}{Z_b - Z_a}, \quad \text{так как } U_2 = \frac{I_1}{2} (Z_b - Z_a).$$

Рассматриваемый четырехполюсник является симметричным, поэтому $a_{22} = a_{11}$ и

$$[a] = \begin{bmatrix} \frac{Z_a + Z_b}{Z_b - Z_a} & \frac{2Z_a Z_b}{Z_b - Z_a} \\ \frac{2}{Z_b - Z_a} & \frac{Z_a + Z_b}{Z_b - Z_a} \end{bmatrix}.$$

Заметим, что при $Z_b = Z_a$ матрица a -параметров не существует. Если известны a -параметры некоторого произвольного симметричного обратимого четырехполюсника, то можно определить Z_a и Z_b эквивалентной скрещенной структуры. Решая систему

$$\frac{Z_a + Z_b}{Z_b - Z_a} = a_{11}, \quad \frac{2}{Z_b - Z_a} = a_{21},$$

находим:

$$Z_a = \frac{a_{11} - 1}{a_{21}}, \quad Z_b = \frac{a_{11} + 1}{a_{21}}.$$

Величины Z_a и Z_b можно определить, рассматривая и другие параметры скрещенной структуры; это представляется выполнить самостоятельно.

11.6. Для первого варианта параметров для симметричной скрещенной структуры

$$[a] = \begin{bmatrix} \frac{s^2 + 2}{2 - s^2} & \frac{2s}{2 - s^2} \\ \frac{4s}{2 - s^2} & \frac{s^2 + 2}{2 - s^2} \end{bmatrix}$$

(использованы соотношения, полученные в решении задачи 11.4; $Z_a = 0,5s$, $Z_b = 1/s$),

$$H_U = \frac{1}{a_{11} + Y_n a_{12}} = \frac{1}{\frac{s^2 + 2}{2 - s^2} + \frac{2s}{2 - s^2}} = \frac{2 - s^2}{s^2 + 2s + 2}.$$

Нули функции $\pm\sqrt{2}$, полюса $-1 \pm j$. Следует обратить внимание, что в данном случае один из нулей функции ($+\sqrt{2}$) располагается на оси вещественных в правой полуплоскости комплексной частоты. Подобные системы называют неминимально-фазовыми.

11.8. Измерения напряжения на нагрузке при известном напряжении на входе четырехполюсника позволяют определить значения модуля функции передачи по напряжению $|H_U|$. Поэтому целесообразно выразить $|H_U|$ через y -параметры:

$$|H_U| = \frac{|y_{21}|}{|G_n + \operatorname{Re} y_{22} + j \operatorname{Im} y_{22}|}.$$

11.9. Решение задачи сводится к преобразованию систем уравнений четырехполюсника, в которых осуществляют взаимную замену величин известных и величин определяемых. Например, в y -параметрах заданы U_1 и U_2 , определяют I_1 и I_2 ; в z -параметрах определяют U_1 и U_2 при известных I_1 и I_2 . Правильность решения можно проконтролировать по таблице пересчета параметров четырехполюсника, которая приводится в учебнике по ТОЭ.

11.10 и **11.11.** Обратить внимание на то, что в процессе решения этих задач один из a -параметров вычисляют путем извлечения квадратного корня из некоторого выражения. Следует учитывать оба знака («+») и («-»); это приводит к тому, что каждая задача имеет два решения.

11.13. Следует определить y -параметры всей структуры, рассматривая ее как регулярное параллельное соединение неполного четырехполюсника (R -элемент) и исходного четырехполюсника.

11.14. Можно рассматривать исходную схему как каскадное соединение трех звеньев обратной Γ -структуры или каскадное соединение структур T и Π .

11.15. Представим схему как каскадное соединение четырехполюсников T - и Γ -структур.

Матрицы a -параметров четырехполюсников

$$[a_r] = \begin{bmatrix} 1 + Z_{a1}/Z_b & Z_{a1} + Z_{a2} + Z_{a1}Z_{a2}/Z_b \\ 1/Z_b & 1 + Z_{a2}/Z_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+s & 1+s+s^2 \\ s & 1+s^2 \end{bmatrix};$$

$$[a_r] = \begin{bmatrix} 1 & Z_a \\ 1/Z_b & 1 + Z_a/Z_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ s & 1+s \end{bmatrix}.$$

При каскадном соединении a -параметры результирующего четырехполюсника определяют, перемножая матрицы a -параметров, входящих в структуру четырехполюсников в направлении передачи.

В данном случае

$$[a] = [a_r][a_r] = \begin{bmatrix} s^3 + s^2 + 2s + 1 & s^3 + 2s^2 + 3s + 2 \\ s^3 + 2s & s^3 + s^2 + 2s + 1 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что в примере каскадное соединение двух несимметричных четырехполюсников в результате дало симметричный четырехполюсник: $a_{11} = a_{22}$ (см. задачу 11.19).

Определяем функции цепи

$$H_U = \frac{1}{a_{11} + Y_H a_{12}} = \frac{1}{2s^3 + 3s^2 + 5s + 3};$$

$$H_I = \frac{1}{Z_H a_{21} + a_{22}} = \frac{1}{2s^3 + s^2 + 4s + 1}.$$

Характеристические параметры при $s = j2$

$$\underline{Z}_{c1} = Z_{c2} = Z_c = \sqrt{\frac{a_{12}}{a_{21}}} = \sqrt{\frac{-6 - j2}{-j4}} = 1,257 e^{-j33,8^\circ},$$

$$e^\alpha = a_{11} + \sqrt{a_{12}a_{21}} = -5,941 - j8,08 = 10,03 e^{j233,7^\circ},$$

$$\alpha = \ln 10,03 = 2,31 \text{ Неп}, \quad \beta = 233,7^\circ.$$

11.18. Определяем a -параметры каждого из четырехполюсников:

по условию симметричности

$$a_{22} = a_{11} = s + 1;$$

$$\text{из условия } |a| = 1$$

$a_{21} = \frac{a_{11}^2 - 1}{a_{21}} = s$ (четыреполюсник обратимый). Выходной (индекс 2) четырехполюсник нагружен на $Z_H = 1$

$$H_{U2} = \frac{1}{a_{11} + Y_H a_{12}} = \frac{1}{2s + 3}, \quad H_{I2} = \frac{1}{a_{21} Z_H + a_{22}} = \frac{1}{2s + 3}.$$

Входное сопротивление второго четырехполюсника (индекс 2) определяется выражением

$$Z_{i, \kappa 2} = \frac{a_{11} Z_H + a_{12}}{a_{21} Z_H + a_{22}} = \frac{2s + 3}{2s + 1}.$$

Это сопротивление является нагрузочным для первого четырехполюсника (индекс 1). Поэтому

$$H_{U1} = \frac{1}{a_{11} + a_{12}/Z_{\text{н}2}} = \frac{2s + 3}{4s^2 + 10s + 5},$$

$$H_{I1} = \frac{1}{a_{21}Z_{\text{н}2} + a_{22}} = \frac{2s + 1}{4s^2 + 6s + 1}.$$

Для всей системы

$$H_U = H_{U1}H_{U2} = \frac{1}{4s^2 + 10s + 5},$$

$$H_I = H_{I1}H_{I2} = \frac{1}{4s^2 + 6s + 1}.$$

Этот результат можно также получить, если определить a -параметры всей системы как каскадного соединения двух четырехполюсников и далее воспользоваться известными выражениями H_U и H_I .

11.19. Данная задача имеет множество решений.

11.22. Обратить внимание на то, что для заданного четырехполюсника не выполняется условие $|a| = 1$.

11.24. Схему рис. 11.24, б следует рассматривать как регулярное параллельное соединение идеального трансформатора и неполного четырехполюсника, образованного C -элементом; схему рис. 11.24, в целесообразно представить как каскадное соединение пяти четырехполюсников (см. пунктир на рисунке).

11.26. Входное сопротивление идеального гиратора, нагруженного на $Z_{\text{н}} = 1/sC$, определяется выражением $Z_{\text{вх}} = \frac{1}{G^2 Z_{\text{н}}} = \frac{sC}{G^2} = sL$, где $L = C/G^2$. Следовательно, с помощью гиратора и емкостного элемента можно получить эффект индуктивного элемента. Это свойство цепи используют на практике.

11.28. Для определения a -параметров воспользуемся методом пропорциональных величин, рассматривая режимы холостого хода ($I_2 = 0$) и короткого замыкания ($U_2 = 0$) выводов 2—2'.

1. $I_2 = 0$; принимаем U_2 известной величиной, тогда $I_3 = I_4 = (U_2 + \mu U)/R$, $U = RI_3 + U_2 = 2U_2 + \mu U$, откуда $U = \frac{2U_2}{1 - \mu} = RI$;

$$I_1 = I + I_3 = \frac{2U_2}{(1 - \mu)R} + \frac{U_2 + \mu U}{R} = \frac{(3 + \mu)U_2}{(1 - \mu)R},$$

$$U_1 = U + RI_1 = \frac{2U_2}{1 - \mu} + \frac{(3 + \mu)U_2}{1 - \mu} = \frac{5 + \mu}{1 - \mu} U_2.$$

Определяем: $a_{11} = U_1/U_2|_{I_2=0} = \frac{5 + \mu}{1 - \mu}$, $a_{21} = I_1/U_2|_{I_2=0} = \frac{3 + \mu}{(1 - \mu)R}$

2. $U_2=0$; принимаем I_2 известной величиной, тогда $I_4=$
 $= -\frac{\mu U}{R} I_3 = I_4 + I_2 = I_2 - \frac{\mu U}{R}$, $U = RI_3 + U_2 = RI_2 - \mu U$, откуда $U =$
 $= \frac{RI_2}{1 + \mu}$, $I_1 = I + I_3 = \frac{U}{R} + I_2 - \frac{\mu U}{R} = \frac{2I_2}{1 + \mu}$, $U_1 = RI_1 + U = \frac{3RI_2}{1 + \mu}$.
 Определяем: $a_{12} = U_1/I_2|_{U_2=0} = \frac{3R}{1 + \mu}$, $a_{22} = I_1/I_2|_{U_2=0} = \frac{2}{1 + \mu}$.

Получена матрица a -параметров $[a] = \begin{bmatrix} \frac{5 + \mu}{1 - \mu} & \frac{3R}{1 + \mu} \\ \frac{3 + \mu}{R(1 - \mu)} & \frac{2}{1 + \mu} \end{bmatrix}$.

Рассмотренный четырехполюсник необратим из-за наличия зависимого источника; $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 1$, равенство $|a| = 1$ выполняется только при $\mu = 0$.

ГЛАВА 12

ЧАСТОТНО-ИЗБИРАТЕЛЬНЫЕ ЦЕПИ

12.1р. Последовательный колебательный контур высокой добротности имеет полосу пропускания $2\Delta\omega_0 = 20 \cdot 10^3$ рад/с, модуль входного сопротивления на границе полосы пропускания $|\underline{Z}| = 14,1$ Ом, емкость контура $C = 800$ пФ. Определить величины R , L и добротность контура Q .

12.2. К последовательному колебательному контуру высокой добротности приложено напряжение $u = 0,2 \cos \omega t$. Частота ω больше резонансной частоты контура на 5%, добротность контура $Q = 80$, активное сопротивление контура $R = 20$ Ом. Определить напряжение на емкостном элементе $u_C(t)$ и мощность, потребляемую контуром.

12.3 На входе последовательного колебательного контура высокой добротности действует напряжение $u_1 = 2 \cos \omega_0 t$; $\omega_0 = 10^7$ рад/с — резонансная частота контура. Напряжение на емкостном элементе $u_C = 100 \cos \omega_0 t$. Как изменится u_C при увеличении емкости контура на 10%.

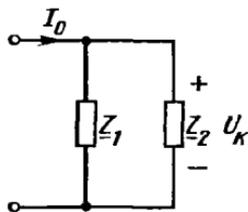


Рис. 12.4

12.4. В параллельном колебательном контуре (рис. 12.4) $\underline{Z}_1 = R + j\omega L$, $\underline{Z}_2 = -j \frac{1}{\omega C}$. Резонансная частота контура $\omega_0 = 2 \cdot 10^6$ рад/с, добротность контура $Q = 50$. Входное сопротивление контура при резонансной частоте $|\underline{Z}_0| = 50$ кОм. Определить параметры R , L , C -контура.

12.5р. В параллельном колебательном контуре высокой добротности (рис. 12.4) $\underline{Z}_1 = R + j\omega L$, $\underline{Z}_2 = -j \frac{1}{\omega C}$, $L = 144$ мкГ, $C = 400$ пФ. Мощность, потребляемая контуром при резонансе, $P = 50$ мВт, амплитуда напряжения на емкостном элементе $U_{cm} = 60$ В. Определить R , добротность контура и полосу пропускания.

12.6. Дан параллельный колебательный контур (рис. 12.4) $\underline{Z}_1 = R + j\omega L$, $\underline{Z}_2 = -j \frac{1}{\omega C}$. Добротность контура $Q = 80$, сопротивление $R = 20$ Ом, полоса пропускания $2\Delta\omega_0 = 2 \cdot 10^4$ рад/с. Как изменится полоса пропускания контура при подключении параллельно с контуром сопротивления $R = 50$ кОм?

12.7р. На входе сложного параллельного контура [1, 8] действует источник тока $i = 2 \cdot 10^3 \cos 10^6 t + 2 \cdot 10^{-3} \cos 2 \cdot 10^6 t$. Индуктивность контура $L = 500$ мкГ. Определить структуру и параметры контура таким образом, чтобы на нем $u = 15 \cdot 10^{-3} \cos 10^6 t + 75 \cos 2 \cdot 10^6 t$, т. е. амплитуда второй гармонической составляющей u превышала амплитуду первой в $5 \cdot 10^3$ раз.

12.8. На входе сложного параллельного контура [1, 8] действует источник тока $i = 2 \cdot 10^{-3} \cos 10^6 t + 2 \cdot 10^{-3} \cos 2 \cdot 10^6 t$. Активное сопротивление одной из ветвей контура $R_2 = 5$ Ом. Определить структуру и параметры контура таким образом, чтобы на нем напряжение $u = 75 \cos 10^6 t + 20 \cdot 10^{-3} \cos 2 \cdot 10^6 t$, т. е. амплитуда первой гармонической составляющей u превышала амплитуду второй в 3750 раз.

12.9. Дана цепь, состоящая из двух связанных контуров (рис. 12.9) с параметрами $L = 480$ мкГ, $L_{св} = 20$ мкГ, $C = 400$ пФ. Значе-

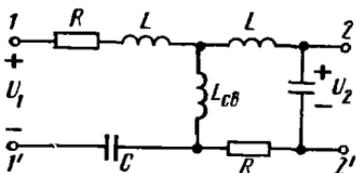


Рис. 12.9

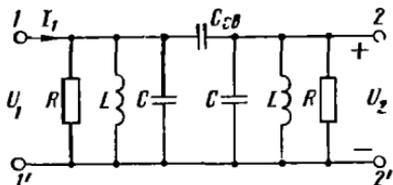


Рис. 12.11

ние передаточной функции $H_U = \dot{U}_2 / \dot{U}_1$ при резонансной частоте ω_0 $H_{U0} = 20$. Определить полосу пропускания системы, построить частотные характеристики $H_U(\omega)$.

12.10р. На вход цепи из двух одинаковых связанных контуров (рис. 12.9) подается напряжение $u_1 = 2 \cos 0,995\omega_0 t$; ω_0 — резонансная частота контуров. Параметры цепи: $L = 400$ мкГ, $C = 200$ пФ, $R = 15$ Ом, $k_{св} = 0,02$. Определить $u_2(t)$ и полосу пропускания системы. Построить частотные характеристики для передаточной функции $Z_{21} = \dot{U}_2 / I_1$.

12.11р. Определить значения параметров R , C и $C_{св}$ цепи (рис. 12.11), состоящей из двух одинаково связанных контуров таким образом, чтобы модуль передаточной функции цепи $|Z| = U_2 / I_1$ был

равен $|Z_0| = 16$ кОм при резонансной частоте $\omega_0 = 5 \cdot 10^6$ рад/с, а на границе полосы пропускания — $|Z_{гр}| = 14,1$ кОм, $L = 250$ мкГ. Найти полосу пропускания цепи.

12.12. На вход цепи (рис. 12.11) подключен источник тока $i = 10^{-3} \cdot \cos \omega t$. Параметры контуров: $L = 400$ мкГ, $C = 390$ пФ, $C_{св} = 10$ пФ, $R = 80$ кОм. Определить напряжение на выходе цепи для двух случаев: $\omega = \omega_0$ и $\omega = 0,95\omega_0$, где ω_0 — резонансная частота системы.

12.13. На входе частотно-избирательной цепи (рис. 2.9) действуют полезный сигнал $i_1 = I_m(1 + \cos \omega_1 t) \cos \omega_0 t$ и помеха $i_{п} = I_{пм} \cos \omega_{п} t$.

1. Составить алгоритм расчета параметров цепи L , $L_{св}$, R и C для следующих условий: а) резонансная частота цепи должна быть равной ω_0 ; б) полезный сигнал на выходе должен иметь вид $u_2 = U_{2м}[1 + \cos(\omega_1 t + \alpha_1)] \sin \omega_0 t$, величина α_1 определяется после расчета передаточной функции контура; в) амплитуда помехи на выходе должна составлять $n\%$ от максимальной величины полезного сигнала, т. е. от $2U_{2м}$.

2. Для заданных значений $I_{1м}$, ω , $I_{пм}$, $\omega_{п}$ определить максимально возможное значение $n\%$.

3. Определить параметры цепи для следующих данных: $I_{1м} = I_{пм} = 10^{-3}$ А, $U_{2м} = 50$ В, $\omega_1 = 10^4$ рад/с, $\omega_{п} = 2,5 \cdot 10^4$ рад/с, $\omega_0 = 10^6$ рад/с.

4. Для цепи с параметрами, найденными в п. 3, определить напряжение на выходе цепи, используя точное выражение передаточной функции.

12.14. Определить параметры и схемы двух однозвенных фильтров типа k по следующим данным: у первого фильтра характеристическое сопротивление при $\omega_1 = 10^4$ рад/с $Z_c = 10^4$, при $\omega_2 = 2\omega_1$ $Z_c = j10^4$; у второго фильтра при $\omega_1 = 2 \cdot 10^4$ рад/с $Z_c = 10^4$, при $\omega_2 = 1,5\omega_1$ $Z_c = -j5 \cdot 10^3$.

12.15. Частота среза фильтра нижних частот типа k $\omega_c = 5 \cdot 10^3$ рад/с; сопротивление нагрузки $R_H = 1$ кОм согласовано по частоте $\omega = 0$. Определить параметры фильтра L и C . Получить выражение функции передачи $H_U = \dot{U}_2 / \dot{U}_1$ и построить график амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристики функции передачи для Т- и П-образных фильтров.

12.16. Низкочастотный фильтр состоит из n звеньев, показанных на рис. 12.16; $Z_1 = Z_2 = j0,5\omega$, $Z_3 = -j \frac{1}{\omega C}$. Фильтр нагружен

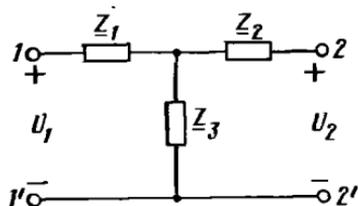


Рис. 12.16

на сопротивление $R_H = 1$. Описать алгоритм вычисления модуля передаточной функции фильтра $H_U = \dot{U}_2 / \dot{U}_1$. Вычислить функцию передачи для $n = 1, 2, 3, 4$.

12.7м. На входе Т-образного однозвенного фильтра типа k действуют полезный сигнал $u_1 =$

$= U_m \cos^2 10^3 t$ и помеха $u_{\text{пг}} = U_{\text{пг}} \cos 5 \cdot 10^3 t$; $U_m = U_{\text{пг}}$. Сопротивление нагрузки $R_H = 10$ Ом. Рассчитать параметры фильтра таким образом, чтобы напряжение на выходе фильтра равнялось $u_2 = U_m \cos^2 (10^3 t - \alpha) + 0,1 U_{\text{пг}} \cos (5 \cdot 10^3 t - \alpha_{\text{пг}})$. Значения α и $\alpha_{\text{пг}}$ можно определить из выражения передаточной функции $H_U = \underline{U}_2 / \underline{U}_1$.

12.18. Низкочастотный фильтр типа k состоит из пяти звеньев, показанных на рис. 12.16; $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = j0,5\omega L$, $\underline{Z}_3 = -j \frac{1}{\omega C}$. Определить пределы изменения фазы передаточной функции фильтра при изменении частоты от $\omega = 0$ до $\omega = \infty$. Останется ли фильтр низкочастотным, если подключить емкость C_1 параллельно индуктивности одного из звеньев? Может ли частота среза такого фильтра ω_c превышать величину $\omega = \sqrt{2/L_1 C_1}$?

12.19. Электрический фильтр верхних частот типа k имеет частоту среза $\omega_c = 5 \cdot 10^3$ рад/с, сопротивление нагрузки $R_H = 1$ кОм согласовано по частоте при $\omega = \infty$. Определить параметры фильтра L , C . Считая сопротивление нагрузки постоянным $R_H = 1$ кОм, определить выражение функции передачи $H_U = \underline{U}_2 / \underline{U}_1$ и построить графики амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристик этой функции для Т- и П-образных фильтров.

12.20. Определить параметры и структуру двух фильтров типа k для следующих данных. Характеристические сопротивления: первого фильтра при $\omega_1 = 2 \cdot 10^4$ рад/с $\underline{Z}_c = j4 \cdot 10^3$, при $\omega_2 = 3 \cdot 10^4$ рад/с $\underline{Z}_c = 2 \cdot 10^3$; второго фильтра при $\omega_1 = 2 \cdot 10^3$ рад/с $\underline{Z}_c = -j2 \cdot 10^3$, при $\omega_2 = 3 \cdot 10^4$ рад/с $\underline{Z}_c = 4 \cdot 10^3$.

12.21. На вход Т-образного однозвенного фильтра типа k подается напряжение $u_1 = 2 \cos 10^3 t + 2 \cos 2 \cdot 10^3 t$. Напряжение на выходе фильтра $u_2 = 2 \cos (10^3 t + 180^\circ) + 2 \cos (2 \cdot 10^3 t + 60^\circ)$. Определить напряжение на выходе фильтра при увеличении (уменьшении) периода входного сигнала в два раза.

12.22р. Полосовой фильтр (рис. 12.16) нагружен на активное сопротивление $R = 10$ кОм, согласованное на центральной частоте; $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = j\omega \frac{L_1}{2} - j \frac{1}{\omega 2C_1}$; $\underline{Y}_3 = j\omega C_2 - j \frac{1}{\omega L_2}$. Полоса пропускания фильтра $\Delta f = (10 \div 12)$ кГц. Определить параметры фильтра L_1 , C_1 , L_2 , C_2 и коэффициент передачи фильтра при $\omega_1 = 66$ рад/с.

12.23. Полосовой фильтр типа k (рис. 12.16) имеет: $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = j\omega 0,5 - j \frac{1}{\omega \cdot 2}$; $\underline{Y}_3 = j\omega 5 - j \frac{1}{\omega \cdot 0,2}$. Сопротивление нагрузки $R_H = 1$ Ом согласовано на центральной частоте. Рассчитать амплитудно-частотную характеристику передаточной функции фильтра $H_U = \underline{U}_2 / \underline{U}_1$.

12.24р. Заграждающий фильтр типа k (рис. 12.16) имеет параметры $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = j\omega 2C_1 - j \frac{1}{\omega L_1/2}$; $\underline{Z}_3 = j\omega L_2 - j \frac{1}{\omega C_2}$; сопротивление нагрузки $R_H = 2,5$ кОм согласовано на центральной частоте. Фильтр задерживает сигналы в полосе частот от $f_1 = 300$ Гц до $f_2 = 2500$ Гц. Определить параметры L_1 , C_1 , L_2 , C_2 .

12.25. Заграждающий фильтр типа k (рис. 12.16), имеющий $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = j\omega \cdot 2 - j \frac{1}{\omega 0,5}$, $\underline{Z}_3 = j\omega 5 - j \frac{1}{0,2\omega}$, включен на нагрузку $R_H = 1$ Ом. Построить амплитудно-частотную характеристику функции передачи фильтра $H_U = \dot{U}_2 / \dot{U}_1$.

12.26р. Г-образный фильтр нижних частот последовательно-производного звена типа m имеет частоту среза $f_c = 1$ кГц, $m = 0,6$; $R_H = 500$ Ом, согласованное на частоте $\omega = 0$. Изобразить схему фильтра. Определить параметры фильтра и частоту бесконечного затухания.

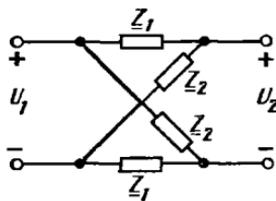


Рис. 12.29

12.27. Г-образный фильтр верхних частот параллельно-производного звена типа m имеет бесконечное затухание при частоте $f_\infty = 5$ кГц, $m = 0,6$; $R = 25$ кОм, согласованное на частоте $\omega = \infty$. Изобразить схему фильтра. Определить частоту среза и параметры фильтра.

12.28. Г-образный полосовой фильтр параллельно-производного звена типа m имеет полосу пропускания $5 \div 15$ кГц при $m = 0,6$; $R_H = 40$ кОм согласовано на центральной частоте. Изобразить схему фильтра. Определить частоты бесконечного затухания и параметры фильтра.

12.29. Реактивный мостовой фильтр (рис. 12.29), у которого $\underline{Z}_1 = j\omega L_1$, $\underline{Z}_2 = j\omega L_2 - j \frac{1}{\omega C_2}$ имеет частоту среза $\omega_c = 2$ рад/с, частоту бесконечного затухания $\omega_\infty = 4$ рад/с, характеристическое сопротивление фильтра на частоте $\omega = 1$ рад/с $\underline{Z}_c = \frac{3}{4}$ Ом. Определить параметры L_1, L_2, C_2 .

12.30. Реактивный мостовой фильтр (рис. 12.29), у которого $\underline{Z}_1 = j\omega L_1 - j \frac{1}{\omega C_1}$ и $\underline{Z}_2 = -j \frac{1}{\omega C_2}$, имеет частоту среза $\omega_c = 1$ рад/с. Характеристическое сопротивление на частоте бесконечного затухания $\omega_\infty = \frac{1}{3}$ рад/с $\underline{Z}_c = -j \frac{4}{3}$. Определить параметры L_1, C_1, C_2 .

12.31. Дан реактивный мостовой фильтр (рис. 12.29), у которого $\underline{Z}_1 = j\omega 1 - j \frac{1}{\omega \cdot 1}$ и $\underline{Z}_2 = j\omega \cdot 0,125 - j \frac{1}{\omega 2}$. Определить частоты среза ω_{c1} и ω_{c2} , частоту бесконечного затухания и характеристическое сопротивление фильтра на частоте $\omega = \frac{1}{2}(\omega_{c1} + \omega_{c2})$.

12.32. Некоторая частотно-избирательная цепь состоит из двух одинаковых контуров: последовательных с индуктивной связью (см. рис. 12.9) или параллельных с емкостной связью (см. рис. 12.11). Требуется опытным путем определить вид частотно-избирательной цепи и величины ее параметров: $L, C, R, L_{св}$ или $C_{св}$. Описать методику необходимых измерений, считая доступными только точки 1—1' и 2—2' цепи.

12.33. Задачу 12.32 решить для случая, если частотно-избирательной цепью является Т- или П-образный фильтр типа k нижних (высших) частот.

12.34. Низкочастотный фильтр типа k состоит из n каскадно соединенных звеньев, показанных на рис. 12.16, с величинами $\underline{Z}_1 = j\omega L$, $\underline{Z}_2 = 0$, $\underline{Y}_3 = j\omega C$. Частота среза фильтра $\omega_{с1} = 1$. Определить частоту среза, если в схеме фильтра индуктивности и емкости поменять местами.

РЕШЕНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

12.1. Сопротивление контура $\underline{Z} = R(1 + j\varepsilon)$, где $\varepsilon = \frac{2 \cdot \Delta\omega}{\omega_0} Q$ — обобщенная расстройка контура. На границе полосы пропускания значение $\varepsilon = 1$, т. е. $\varepsilon = 1 = \frac{2 \cdot \Delta\omega}{\omega_0} Q = \frac{2 \cdot \Delta\omega}{\omega_0} \cdot \frac{\omega_0 L}{R}$, откуда $L = 500$ мкГ. Величина R находится по заданному значению входного сопротивления $|\underline{Z}_{гр}|$ на границе полосы пропускания $|\underline{Z}_{гр}| = R\sqrt{1 + \varepsilon^2} = R\sqrt{2} = 14,1$, откуда $R = 10$ Ом. Добротность $Q = \frac{VLC}{R} = 79$.

12.5. Характеристическое сопротивление контура

$$\rho = \sqrt{LC} = 600 \text{ Ом},$$

при резонансе амплитуда тока емкостного элемента

$$I_{Cm} = \frac{U_{Cm}}{1/\omega_0 C} = \frac{U_{Cm}}{\rho} = 0,1 \text{ А},$$

амплитуда тока в индуктивности $I_{Lm} = 0,1$ А. Мощность, потребляемая цепью,

$$P = RI_L^2 = (I_{Lm}\sqrt{2})^2 R,$$

откуда $R = 100$ Ом.

Добротность контура $Q = \rho/R = 60$.

Полоса пропускания

$$2 \cdot \Delta\omega_0 = \frac{\omega_0}{\frac{\omega_0 L_0}{R}} = R/L = 6,95 \cdot 10^4 \text{ рад/с.}$$

12.7. Равенство начальных фаз у соответствующих гармонических составляющих тока и напряжения контура позволяет сделать вывод, что резонансными частотами контура являются: $\omega_{01} = 10^6$ рад/с и $\omega_{02} = 2 \cdot 10^6$ рад/с. Для цепей высокой добротности

можно считать, что на частоте ω_{01} сопротивление контура $|\underline{Z}_1| = \frac{15 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} = 7,5$ Ом минимально, а на частоте $\omega_{02} > \omega_{01}$ сопротивление контура $|\underline{Z}_2| = \frac{75}{2 \cdot 10^{-3}} = 37,5$ кОм — максимально. Таким свойством обладает сложный параллельный контур (см. рис. 12.4), сопротивления \underline{Z}_1 и \underline{Z}_2 которого соответственно равны: $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 - j \frac{1}{\omega C_1}$ и $\underline{Z}_2 = R_2 - j \frac{1}{\omega C_2}$. При частоте $\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$ сопротивление контура $\underline{Z} \approx |\underline{Z}_1| \approx R_1 = 7,5$ Ом.

Так как первая резонансная частота $\omega_{01}^2 = \frac{1}{L_1 C_1}$, то

$$C_1 = \frac{1}{L_1 \omega_{01}^2} = \frac{1}{500 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{12}} = 2000 \text{ пФ.}$$

Вторая резонансная частота для рассматриваемого контура

$$\omega_{02}^2 = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2 L}, \quad C_2 = \frac{2000}{3} \text{ пФ.}$$

Сопротивление контура при $\omega = \omega_{02}$

$$|\underline{Z}_2| = 37,5 \cdot 10^3 = \frac{L}{C_2} \cdot \frac{C_1}{R_1 + R_2}; \quad R_2 = 7,5 \text{ Ом.}$$

12.10. Коэффициент связи двух одинаковых контуров определяется выражением

$$k_{св} = \frac{L_{св}}{L + L_{св}} \rightarrow L_{св} = \frac{L}{\frac{1}{k_{св}} - 1} = 8,2 \text{ мкГ.}$$

Резонансная частота контуров

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(L + L_{св})C}} = 3,5 \cdot 10^{-6} \text{ рад/с.}$$

Добротность контуров

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{(L + L_{св})}{C}} = 95.$$

Фактор связи контуров $A = k_{св} Q = 1,9$.

Обобщенная расстройка контуров

$$\varepsilon = \frac{2 \cdot \Delta \omega}{\omega_0} Q = \frac{2(\omega - \omega_0)}{\omega_0} Q = \frac{2(0,995 - 1)}{\omega_0} Q = -0,95.$$

Передаточная функция цепи

$$H = \frac{AQ}{1 + A^2 - \varepsilon^2 + j2\varepsilon} = 43,5 e^{j26^\circ}.$$

Напряжение на выходе

$$\begin{aligned} \dot{U}_{2m} &= H \dot{U}_{1m} = 87 e^{j26^\circ}, \\ u_2 &= 87 \cos(0,995\omega_0 t + 26^\circ). \end{aligned}$$

2.11. Максимальное значение сопротивления передачи системы $|Z_{\max}| = \sqrt{2} \cdot |Z_{\text{гр}}| = R/2$. Откуда $R = 2\sqrt{2}|Z_{\text{гр}}| = 40$ кОм. Резонансная частота контуров

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L(C + C_{\text{св}})}; \quad C + C_{\text{св}} = \frac{1}{\omega_0^2 L} = 160 \text{ пФ}.$$

При резонансной частоте модуль функции передачи

$$|Z_0| = \frac{RA}{A^2 + 1}; \quad 16 \cdot 10^3 = \frac{40A}{A^2 + 1}, \quad \text{откуда } A = 2.$$

Фактор связи $A = \omega_0 C_{\text{св}} R$ и $C_{\text{св}} = \frac{A}{\omega_0 R} = 10$ пФ.

12.17. Полезный сигнал, действующий на входе фильтра, можно выразить как $u_1 = 0,5U_m + 0,5U_m \cos 2 \cdot 10^3 t$.

При заданном сопротивлении $R_{\text{н}}$ передаточная функция фильтра $H_U(j\omega) = \dot{U}_2/\dot{U}_1$ зависит только от параметров L - и C -фильтров, для определения которых имеется два условия:

$$\left. \begin{aligned} |H_U(j2 \cdot 10^3)| &= 1, \\ |H_U(j5 \cdot 10^3)| &= 0,1. \end{aligned} \right\}$$

Функция $H_U(j\omega)$ может быть получена методом пропорциональных величин.

12.22. Для использования метода преобразования частоты найдем параметры низкочастотного фильтра для следующих данных:

$$\omega_c = \omega_{c2} - \omega_{c1} = 2\pi(12 - 10)10^3 = 12,56 \cdot 10^3 \text{ рад/с},$$

$$R = 10 \text{ кОм}, \quad L = \frac{2R}{\omega_0} = 1,59 \text{ Г}, \quad C = \frac{2}{\omega_c R} = 1,59 \cdot 10^{-8} \text{ Ф}.$$

Используем связь между параметрами низкочастотного фильтра — прототипа и полосового:

$$L_1 = L = 1,59 \text{ Г}; \quad C_1 = \frac{1}{\omega_0^2 L} = 1,33 \cdot 10^{-10} \text{ Ф}; \quad C_2 = C = 1,59 \cdot 10^{-8} \text{ Ф};$$

$$L_2 = \frac{1}{\omega_0^2 C_2} = 0,0133 \text{ Г}.$$

Здесь $\omega_0^2 = \omega_{c1} \cdot \omega_{c2} = 47,5 \cdot 10^8 \text{ рад/с}.$

Для определения функции передачи найдем сопротивления продольных ветвей фильтра \underline{Z}_1 и \underline{Z}_2 и проводимость поперечной ветви \underline{Y}_2 на заданной частоте:

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_3 = j0,5L_1\omega_1 - j \frac{1}{2C_1\omega_1} = -j0,475 \cdot 10^4,$$

$$\underline{Y}_2 = j\omega_1 C_2 - j \frac{1}{\omega_1 L_2} = -j0,95 \cdot 10^4.$$

Функцию передачи фильтра можно найти методом пропорциональных величин.

12.24. Параметры фильтра — прототипа фильтра верхних частот:

$$L = \frac{R}{2 \cdot \Delta\omega} = \frac{R}{2 \cdot 2\pi(f_{c2} - f_{c1})} = 0,0905 \text{ Г},$$

$$C = \frac{1}{2\Delta\omega R} = \frac{1}{2 \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 2,5 \cdot 10^3} = 0,0145 \text{ мкФ}.$$

Используя связь между параметрами фильтра — прототипа заграждающего фильтра, получим $C_1 = C = 0,0145$ мкФ;

$$L_1 = \frac{1}{\omega_0^2 C_1} = 2,34 \text{ Г}; \quad L_2 = L = 0,0905 \text{ Г}; \quad C_2 = \frac{1}{\omega_0^2 L_2} = 0,38 \text{ мкФ}.$$

12.26. Параметры фильтра типа k

$$L = \frac{R}{\pi f_0} = 0,159 \text{ Г}, \quad C = \frac{1}{\pi f_0 R} = 0,636 \text{ мкФ}.$$

На рис. 12.4 изображена схема фильтра m , для которого

$$Z_1 = j\omega L_1; \quad Z_2 = j\omega L_2 - j \frac{1}{\omega C_2}.$$

Параметры фильтра типа m

$$L_1 = \frac{mL}{k^2} = 47,7 \text{ мГ}; \quad L_2 = \frac{1-m^2}{2m} L = 85 \text{ мГ};$$

$$C_2 = \frac{mC}{2} = 0,191 \text{ мкФ}.$$

Частота бесконечного затухания

$$f_\infty = f_c \sqrt{\frac{1}{1-m^2}} = 1,25 \text{ кГц}.$$

ГЛАВА 13

ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

13.1р. Первичные параметры линии: $R=5$ Ом/км, $L=1,9 \cdot 10^{-3}$ Гн/км, $C=6,35 \cdot 10^{-9}$ Ф/км, $G=0,6 \cdot 10^{-6}$ См/км, частота приложенного синусоидального напряжения $f=10$ кГц.

1. Определить вторичные параметры линии, волновое (характеристическое) сопротивление \underline{Z}_c , коэффициент распространения $\underline{\gamma}$, а также фазовую скорость распространения v_Φ и длину волны λ .

2. Решить задачу, рассматривая линию, как линию без потерь ($R=0, G=0$); сопоставить полученные значения параметров с результатами п. 1.

13.2. В некоторой согласованно нагруженной линии без потерь при частоте f входное сопротивление равно $\underline{Z}_c = \rho$. Определить выражения для первичных параметров линии L и C , если длина волны в линии равна λ .

13.3. Выражение входного сопротивления линии имеет вид

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \underline{Z}_c \frac{1 + W_2 e^{-2\gamma l}}{1 - W_2 e^{-2\gamma l}} = \underline{Z}_c \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_c \operatorname{th} \underline{\gamma} l}{\underline{Z}_c + \underline{Z}_2 \operatorname{th} \underline{\gamma} l}. \quad (13.1)$$

Здесь $W_2 = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_c}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_c}$ — коэффициент отражения от приемного конца линии ($\underline{Z}_2 = \dot{U}_2 / \dot{I}_2$); \underline{Z}_c — волновое (характеристическое) сопротивление линии; $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$ — коэффициент распространения; l — длина линии. Используя (13.1), показать, что вторичные параметры линии

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}_k \underline{Z}_x}, \quad (13.2)$$

$$\underline{\gamma} = \frac{1}{2l} [\ln(1 + \sqrt{\underline{Z}_k / \underline{Z}_x}) - \ln(1 - \sqrt{\underline{Z}_k / \underline{Z}_x})], \quad (13.3)$$

где \underline{Z}_k и \underline{Z}_x — входные сопротивления линии в режимах короткого замыкания и холостого хода.

13.4м. Для некоторой линии длиной $l = 200$ км были измерены при $f = 800$ Гц ($\omega \approx 5 \cdot 10^3$ рад/с) входные сопротивления короткого замыкания и холостого хода: $\underline{Z}_k = 351 e^{j22^\circ 45'}$, $\underline{Z}_x = 1070 e^{-j37^\circ 11'}$. Определить вторичные и первичные параметры линии.

13.5м. Определить выражение входного сопротивления двух последовательно соединенных линий. Первая линия имеет длину l_1 и вторичные параметры \underline{Z}_{c1} и $\underline{\gamma}_1$, вторая — l_2 и параметры \underline{Z}_{c2} и $\underline{\gamma}_2$. Рассмотреть два случая: 1) вторая линия разомкнута; 2) вторая линия замкнута накоротко.

13.6м. Высокочастотный кабель используют в режиме бегущей волны: $\underline{Z}_c = 550$ Ом, $\alpha = 0,25$ Нп/км, $l = 220$ м; мощность, передаваемая нагрузке, $P_2 = 2$ кВт при $\cos \varphi_2 = 1$. Определить: 1) к. п. д. кабеля; 2) мощность в начале линии; 3) потери в кабеле; 4) напряжение и ток в начале кабеля; 5) напряжение и ток в нагрузке.

13.7р. К разомкнутой линии без потерь длиной 60 км приложено синусоидальное напряжение $U_1 = 10$ В; $\omega = 5 \cdot 10^8$ рад/с; $L = 0,24 \cdot 10^{-2}$ Гн/км; $C = 0,67 \cdot 10^{-8}$ Ф/км. Определить напряжение в конце линии и ток в ее начале.

13.8. Выход линии без потерь, рассмотренной в задаче 13.7, замкнут накоротко. Определить токи в конце и начале линии.

13.9. На входе разомкнутой линии без потерь с волновым сопротивлением $Z_c = \rho = 200$ Ом действует источник синусоидального напряжения $u = U_m \cos \omega t$, длина волны которого $\lambda = 2$ м. Амплитуда напряжения в конце линии $U_m = 100$ В. Определить амплитуду тока и напряжение в точке, отстоящей от конца линии на расстоянии 0,3 м и записать выражения $u(t)$ и $i(t)$ в этой точке.

13.10. Определить входное сопротивление линии без потерь, имеющей длину $l = \lambda/4$ и нагруженной на сопротивление: 1) $Z_2 = j20$; 2) $Z_2 = -j100$. Принять волновое сопротивление линии $Z_c = \rho = 80$ Ом.

13.11. Линия без потерь, имеющая $Z_c = \rho = \sqrt{L/C} = 120$ Ом, $v = 1/\sqrt{LC} = 2 \cdot 10^8$ м/с, $l = 40$ м, замкнута накоротко. Определить величину и характер входного сопротивления линии при $f = 10^6$ Гц. Как изменится входное сопротивление линии, если ее выход будет разомкнут?

13.12. К четвертьволновой линии без потерь (отрезок линии длиной $l = \lambda/4$) подключено сопротивление $Z_2 = -j1000$, длина линии $l = 15$ м, параметры $L = 1$ мкГ/м, $C = 11,1$ пФ/м. Определить величину и характер входного сопротивления. Можно ли воспроизвести полученную величину входного сопротивления при коротком замыкании заданной линии путем изменения ее длины?

13.13. Отрезок двухпроводной, замкнутой на выходе однородной линии без потерь используется в качестве металлической опоры (изолятора) в высокочастотной линии передачи: определить минимальную длину линии-опоры, при которой она будет являться изолятором ($Z_{вх} = \infty$), если ее параметры $L = 3,519$ мкГ/м, $C = 11,1$ пФ/м, а частота сигнала $f = 50$ мГц. Определить величину входного сопротивления линии-опоры при уменьшении частоты сигнала на 5%.

13.14. Показать, что для линии без потерь, нагруженной на активное сопротивление R , коэффициент бегущей волны $k_{с.в} = \rho/R$, если $R > \rho$ и $k_{с.в} = R/\rho$, если $R < \rho$ (ρ — характеристическое сопротивление линии без потерь).

13.15. Приемник с входным сопротивлением $Z_2 = 500e^{j60^\circ}$ подключен к источнику синусоидального напряжения через линию без потерь длиной $l = 55$ м, характеристическое сопротивление линии $\rho = 500$ Ом, коэффициент фазы $\beta = 0,05\pi$ рад/м, напряжение на нагрузке $U_2 = 100$ В. Определить напряжение U_1 и ток I_1 на входе линии, входное сопротивление и коэффициент бегущей волны $k_{с.в}$. Записать выражение бегущей волны, распространяющейся от источника напряжения.

13.16. Линия без потерь ($\rho = 200$ Ом; $\underline{y} = j \frac{2\pi}{\lambda} = j0,2$; длина линии $l = 0,8\lambda$) нагружена на сопротивление $Z_2 = 200e^{j30^\circ}$, напряжение на нагрузке $U_2 = 100$ В. Определить величины U и I в точках линии

$x=0; 0,2\lambda; 0,4\lambda; 0,6\lambda; 0,8\lambda$ (отсчет расстояний от конца линии) и построить графики распределения $U(x)$ и $I(x)$.

13.17. Линия согласованно нагружена; $Z_c=200$; $\alpha=0,02$ Нп/км; $l=150$ км. На расстоянии $l_1=100$ км от конца линии ток $I(l_1)=22,2$ мА. Определить напряжение, ток и мощность в начале линии.

13.18р. К выходу линии (рис. 13.18, а) подключено сопротивление $Z_2=1000+j1000$, на входе действует источник синусоидального напряжения $\dot{U}_0=100$ В, параметры линии $Z_c=600e^{-j10^\circ}$; $\gamma=5 \cdot 10^{-3}+j20 \cdot 10^{-3}$; $l=0,6\lambda$.

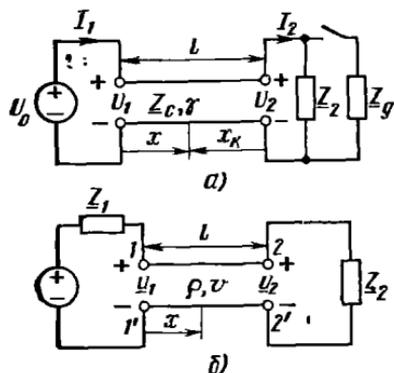


Рис. 13.18

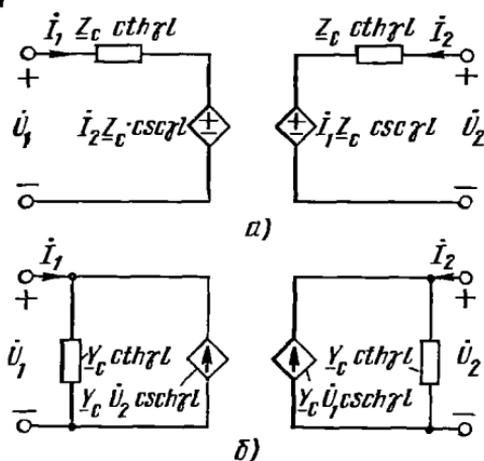


Рис. 13.20

1. Определить напряжение \dot{U}_2 и ток I_2 на выходе линии, ток I_1 источника, мощности P_1 и P_2 и к. п. д. линии $\eta=P_2/P_1$, а также величины входного сопротивления и передаточной функции $H_U=\dot{U}_2/\dot{U}_1$.

2. Найти величину дополнительного сопротивления Z_d , при подключении которого обеспечивается согласование линии с нагрузкой и рассчитать I_1 , U_2 , I_2 для согласованного режима.

13.19м. Для линии, рассмотренной в задаче 13.18, выполнить п. 1 условия при сопротивлениях нагрузки: 1) $Z_2=0$ (линия замкнута накоротко); 2) $Z_2=\infty$ (линия разомкнута); 3) $Z_2=1000-j1000$.

13.20. Показать, что уравнения однородной линии

$$\dot{U}_1=\dot{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \underline{Z}_c \dot{I}_2 \operatorname{sh} \underline{\gamma} l,$$

$$\dot{I}_1=(\dot{U}_2/\underline{Z}_c) \operatorname{sh} \underline{\gamma} l + \dot{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l$$

могут быть записаны в виде уравнений четырехполюсника через y - или z -параметры

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = [z] \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}; \quad [z] = Z_c \begin{bmatrix} \operatorname{cth} \underline{\gamma} l & \operatorname{csch} \underline{\gamma} l \\ \operatorname{csch} \underline{\gamma} l & \operatorname{cth} \underline{\gamma} l \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = [y] \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}; \quad [y] = \frac{1}{Z_c} \begin{bmatrix} \operatorname{cth} \underline{\gamma} l & -\operatorname{csch} \underline{\gamma} l \\ -\operatorname{csch} \underline{\gamma} l & \operatorname{cth} \underline{\gamma} l \end{bmatrix}.$$

На основании этих уравнений можно получить схемы замещения линии с зависимыми источниками напряжений, управляемыми токами (рис. 13.20, а) или источниками токов, управляемыми напряжениями (рис. 13.20, б). Направления токов в уравнениях и на схемах приняты обычными для четырехполюсников (см. рис. 11.0).

13.21. Известно [1], что изображения напряжения и тока в любой точке x линии без потерь (см. рис. 13.18, б), нагруженной на сопротивление $Z_2(s)$ и подключенной к источнику напряжения $u_0(t)$ с внутренним сопротивлением $Z_1(s)$, имеют вид:

$$U(s, x) = \frac{\rho U_0(s)}{\rho + Z_1(s)} \left[e^{-\frac{sx}{v}} + W_2 e^{-\frac{s(2l-x)}{v}} + W_1 W_2 e^{-\frac{s(2l+x)}{v}} + \right. \\ \left. + W_1 W_2^2 e^{-\frac{s(4l-x)}{v}} \dots \right]$$

$$I(s, x) = \frac{U_0(s)}{\rho + Z_1(s)} \left[e^{-\frac{sx}{v}} - W_2 e^{-\frac{s(2l-x)}{v}} + W_1 W_2 e^{-\frac{s(2l+x)}{v}} - \right. \\ \left. - W_1 W_2^2 e^{-\frac{s(4l-x)}{v}} \dots \right].$$

Здесь нечетные слагаемые являются изображениями напряжений и токов прямых волн, распространяющихся от начала к концу линии, четные — изображениями обратных волн; $\rho = \sqrt{L/C}$ — характеристическое сопротивление линии; $v = 1/\sqrt{LC}$ — скорость распространения; $W_1 = W_1(s) = \frac{Z_1(s) - \rho}{Z_1(s) + \rho}$ и $W_2 = W_2(s) = \frac{Z_2(s) - \rho}{Z_2(s) + \rho}$ — коэффициенты отражения в начале и конце линии.

1. Указать условия, при которых в линии будет наблюдаться: а) одна прямая (падающая) волна; б) две — прямая и обратная волны. 2. Определить значения коэффициентов отражения W_1 и W_2 при $Z_1 = 1,5\rho$, $Z_2 = 0,6\rho$.

13.22. В цепи (см. рис. 13.18, б) $U = 100$ В, $Z_1 = R_1 = \rho$, $Z_2 = R_2 = 0,6\rho$; линия без потерь имеет характеристическое сопротивление $\rho = 100$ Ом, время распространения волны вдоль линии равно t_0 . Определить коэффициенты отражения W_1 и W_2 . Найти напряжение и ток на входе линии при $t \in [0; 2t_0]$ и $t > 2t_0$.

13.23р. К разомкнутой линии без потерь ($\rho = 100$ Ом, $v = 2 \cdot 10^8$ м/с, $l = 200$ м) в момент $t = 0$ подключается источник постое-

янного напряжения $U=200$ В. Определить для любой точки линии x выражения $u(t, x)$ и $i(t, x)$ в виде суммы напряжений и токов прямых и обратных волн. Записать выражения $u(t, x)$ и $i(t, x)$ для $x=0$ (начало линии), $x=0,5l$ (середина линии) и $x=l$ (конец линии) и построить графики функций для интервала времени $t \in [0 \div 5t_0]$, где $t_0=l/v$ — время распространения волны вдоль линии.

13.24. Рассмотреть процесс в цепи, указанной в задаче 13.23, при условии, что выход линии замкнут накоротко.

13.25. К линии без потерь ($\rho=100$ Ом, $v=2 \cdot 10^8$ м/с, $l=2$ км) подключено сопротивление $R_2=3\rho$. Определить закон изменения тока источника напряжения $U=200$ В при его подключении ко входу линии.

13.26. К разомкнутой линии без потерь ($\rho=200$ Ом, $v=2 \cdot 10^8$ м/с, $l=2$ км) подключается источник напряжения $U=180$ В, имеющий внутреннее сопротивление $R_1=0,5\rho$. Определить выражения напряжения и тока на входе линии, построить графики.

13.27р. Источник постоянного напряжения $U_0=40$ В подключается к резистивной нагрузке R_2 через две последовательно соединенные линии без потерь (рис. 13.27, а), параметры которых

$$\rho_1=\rho, \quad l_1=l, \quad v_1=v; \quad \rho_2=3\rho, \quad l_2=2l, \quad v_2=2v;$$

сопротивления $R_1=R_2=\rho$. Записать выражения напряжений для точек $x_1=0,5l$ и $x_2=2l$. Найти установившиеся величины напряжений.

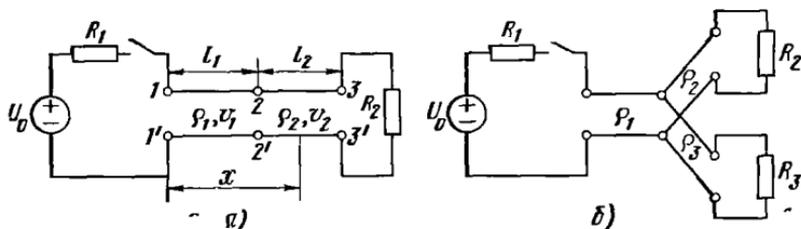


Рис. 13.27

13.28. В цепи, описанной в задаче 13.27: $U_0=400$ В, $\rho_1=\rho=100$ Ом, $\rho_2=3\rho$, время прохождения волн по первой и второй линиям — $t_{01}=l_1/v_1$ и $t_{02}=l_2/v_2$. Определить законы изменения напряжений и токов на входе первой и второй линии (точки 1—1' и 2—2'), а также на нагрузке R_2 (точки 3—3'). Рассмотреть два случая: 1) $R_1=\rho$; 2) $R_1=0$.

13.29. Источник постоянного напряжения $U_0=220$ В подключается к цепи (13.27, б), состоящей из трех отрезков линий без потерь, нагруженных на резистивные приемники R_2 и R_3 : $R_1=\rho_1=50$ Ом, $R_2=\rho_2=2\rho_1$, $R_3=\rho_3=3\rho_1$. Определить напряжение и токи на входах линий при $t=0+$ и $t>2t_0$, где $t_0=l_1/v_1$ — время прохождения волны по первой линии.

13.30р. В цепи (см. рис. 13.18, б) $U_0=120$ В, $Z_1=R_1=50$ Ом; линия без потерь имеет $\rho=50$ Ом, $l=300$ км, $v=3 \cdot 10^8$ м/с; к выходу линии подключен индуктивный элемент $L=25$ мГ ($Z_2=sL$). Опре-

делить изображения напряжения и тока (учесть три волны) для любой точки x линии и записать $u(t, x)$ и $i(t, x)$. Построить графики $u(t)$ и $i(t)$ для середины линии ($x=l/2$) и график распределения напряжения и тока вдоль линии $u(x)$ и $i(x)$ для момента $t=1,5t_0$.

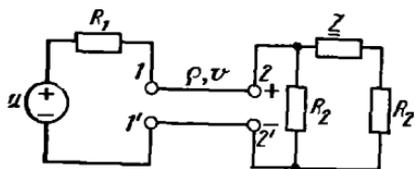


Рис. 13.32

13.31. Выполнить условия задачи 13.30 для цепи рис. 13.18, б, но с емкостным элементом на выходе линии; принять $C=5$ мкФ.

13.32. В цепи рис. 13.32 $\rho=50$ Ом, $R_1=\rho$, $R_2=2\rho$, напряжение источника $u=200 \delta_1(t)$. Определить напряжение u_2 и ток i_2 на приемном

конце линии в момент падения прямой волны ($t=t_0+$) и в установившемся режиме ($t=\infty$), если в качестве двухполюсника Z использованы индуктивный элемент ($Z=sL$) или емкостный элемент ($Z=1/sC$).

13.33. В цепи (см. рис. 13.18, б) $U_0=200$ В, $Z_1=R_1=600$ Ом; линия без потерь имеет $\rho=200$ Ом, $v=2 \cdot 10^5$ км/с, $l=100$ м; нагрузка $Z_2=R_2+sL$; $R_2=\frac{2}{3}\rho=133,3$ Ом; $L=166,7$ мкГ. Определить выражения $u(t, x)$ и $i(t, x)$ (учесть три волны и построить графики $u(t)$ и $i(t)$ для точки $x=l/2$ при $t \in [0, 3t_0-]$; $t_0=l/v$).

13.34. Однородная линия без потерь ($\rho=80$ Ом, $v=1,5 \cdot 10^8$ м/с, $\gamma=300$ м), нагруженная на резистивный приемник ($Z_2=R_2=120$ Ом), подключается к источнику постоянного напряжения $U_0=50$ В; сопротивление $Z_1=R_1+sL$, $R_1=20$ Ом, $L=0,1$ мГн. Определить $u(t, x)$ и $i(t, x)$ с учетом трех волн.

13.35р. Линия без потерь ($\rho=120$ Ом, $l=400$ м, $v=2 \cdot 10^8$ м/с) согласована на входе и выходе ($R_1=\rho=R_2$). К середине линии (рис. 13.35, а) присоединен некоторый двухполюсник Z , ко входу линии подключается источник постоянного напряжения $U_0=60$ В. Определить выражения напряжений в точке $x_1=0,25l$ и на нагрузке Z_2 . Рассмотреть случаи: 1) $Z=R=\rho$; 2) $Z=R=2\rho$; 3) $Z=sL$, $L=30$ мкГн; 4) $Z=\frac{1}{sC}$, $C=4,167$ нФ.

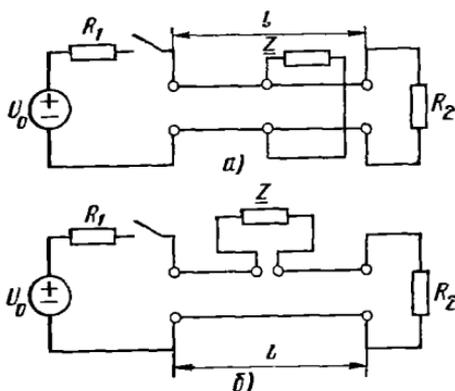


Рис. 13.35

13.36. Две одинаковые линии без потерь ($\rho=120$ Ом, $l=200$ м, $v=2 \cdot 10^8$ м/с) соединены через двухполюсник Z (рис. 13.35, б); ко входу первой линии подключается источник постоянного напряжения $U_0=60$ В. Определить выражения $u(t)$ и $i(t)$ в точках $x_1=l/2$; и $x_2=1,5l$, считая, что $R_1=R_2=\rho$. Рассмотреть случаи: 1) $Z=2\rho$; 2) $Z=sL$, $L=30$ мкГн; 3) $Z=1/sC$, $C=4,167$ нФ.

13.1. Волновое сопротивление и коэффициент распространения для заданной линии:

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = 547 e^{-j^{*}10^{\circ}}; \quad |\underline{Z}_c| = 547 \text{ Ом}; \quad \varphi_c = -1^{\circ}10';$$

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = (4,42 + j218) 10^{-3};$$

$$\alpha = 4,42 \text{ мНп/км}; \quad \beta = 218 \text{ мрад/км}.$$

Фазовая скорость и длина волны в линии:

$$v_{\phi} = \omega/\beta = 2,88 \cdot 10^5 \text{ км/с}, \quad \lambda = 2\pi/\beta = 28,8 \text{ км}.$$

В пренебрежении активными потерями в линии ($R=0, G=0$)

$$\begin{aligned} \underline{Z}_c = \rho = \sqrt{L/C} &= 545 \text{ Ом}; \quad \varphi_c = 0; \quad \underline{\gamma} = j\beta = j\omega \sqrt{LC} = \\ &= j218 \cdot 10^3 \text{ рад/км}; \quad v_{\phi} = \omega/\beta = 1/\sqrt{LC} \approx \\ &\approx 2,88 \cdot 10^5 \text{ км/с}; \quad \lambda = 2\pi/\beta = 2\pi/\sqrt{LC} \approx 28,8 \text{ км}. \end{aligned}$$

При $f=10$ кГц величины \underline{Z}_c , β , v_{ϕ} и λ практически равны соответствующим величинам, найденным с учетом потерь. Существенной особенностью является равенство нулю коэффициента затухания ($\alpha=0$) при $R=0$ и $G=0$.

13.4. Использовать условие задачи 13.3. Для нахождения α и β выделить вещественную и мнимую части $\underline{\gamma}$. Величины R, L, G и C определить из условий $R + j\omega L = \underline{\gamma} \underline{Z}_c$, $G + j\omega C = \underline{\gamma} / \underline{Z}_c$.

13.5. Использовать вторую форму записи входного сопротивления (13.1), приведенную в задаче 13.3.

13.6. Режим бегущей волны наблюдается при условии, когда сопротивление нагрузки $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_c$.

13.7. В линии без потерь ($\underline{Z}_c = \rho$, $\underline{\gamma} = j\beta$) (при отсчете расстояний от конца линии) напряжение и ток в некоторой точке x_K (см. рис. 13.18, а) связаны с напряжением \dot{U}_2 и током \dot{I}_2 в конце линии ($x_K=0$):

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}(x) &= \dot{U}_2 \cos \beta x_K + j\rho \dot{I}_2 \sin \beta x_K, \\ \dot{I}(x) &= j \frac{\dot{U}_2}{\rho} \sin \beta x_K + \dot{I}_2 \cos \beta x_K. \end{aligned} \right\} \quad (13.4)$$

В частности, на входе разомкнутой линии ($x_K=l, I_2=0$)

$$\dot{U}_1 = \dot{U}(l) = \dot{U}_2 \cos \beta l, \quad \dot{I}_1 = \dot{I}(l) = j \frac{\dot{U}_2}{\rho} \sin \beta l.$$

Для условия задачи

$$\beta = \omega \sqrt{LC} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ рад/км}; \quad \rho = \sqrt{L/C} = 600 \text{ Ом};$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 = \frac{\dot{U}_1}{\cos \beta l} = 27,9; \quad U_2 = 27,9 \text{ В}; \quad \dot{I}_1 = j \frac{\dot{U}_2}{\rho} \sin \beta l = \\ = j0,044; \quad I_1 = 44 \text{ мА}. \end{aligned}$$

13.10. Использовать выражение $Z_{\text{вх}}$ (см. задачу 13.3). Принять для линии без потерь $Z_c = \rho$, $\gamma = j\beta = j2\pi/\lambda$.

13.14. Учесть, что $k_{\text{об.в}} = U_{\text{min}}/U_{\text{max}}$, где U_{min} и U_{max} минимальное и максимальное значения напряжений в линии при синусоидальном режиме. Значение U_{max} наблюдается в точках линии, где напряжения прямой \dot{U}_m и обратной $W_2 \dot{U}_m$ волн находятся в фазе, значение U_{min} — там, где \dot{U}_m и $W_2 \dot{U}_m$ будут в противофазе; W_2 — коэффициент отражения на приемном конце линии.

13.15. При отсчете расстояний от приемного конца линии напряжение и ток в некоторой точке x_k :

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \frac{1}{2} (\dot{U}_2 + \rho \dot{I}_2) e^{j\beta x_k} + \frac{1}{2} (\dot{U}_2 - \rho \dot{I}_2) e^{-j\beta x_k} = \\ &= A e^{j\beta x_k} + B e^{-j\beta x_k}, \\ \dot{I}(x) &= \frac{A}{\rho} e^{j\beta x_k} - \frac{B}{\rho} e^{-j\beta x_k}. \end{aligned}$$

Здесь первые слагаемые характеризуют падающую (прямую) волну, вторые — отраженную (обратную).

Для $\dot{U}_2 = U_2 = 100$ и $I_2 = \dot{U}_2/Z_2 = 0,2 e^{-j60^\circ}$ — коэффициенты

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} (\dot{U}_2 + \rho \dot{I}_2) = \frac{1}{2} (100 + 100 e^{-j60^\circ}) = 50 \sqrt{3} e^{-j30^\circ}, \\ B &= \frac{1}{2} (\dot{U}_2 - \rho \dot{I}_2) = 50 e^{j60^\circ}, \end{aligned}$$

$$\beta = 0,05\pi \frac{\text{рад}}{\text{м}} = 9 \text{ град/м}; \quad \text{длина волны } \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 40 \text{ м}.$$

В начале линии ($x=l=55$ м) $\beta l = 9^\circ \cdot 55 = 9^\circ \cdot 15 = 135^\circ$ (с учетом периодичности)

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 = \dot{U}(l) &= A e^{j\beta l} + B e^{-j\beta l} = 50 \sqrt{3} e^{-j30^\circ} e^{j135^\circ} + \\ &+ 50 e^{j60^\circ} e^{-j135^\circ} = 52,189 e^{j105^\circ}; \quad \dot{I}_1 = \dot{I}(l) = \frac{A}{\rho} e^{j\beta l} - \\ &- \frac{B}{\rho} e^{-j\beta l} = 0,3044 e^{j105^\circ}; \quad Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}(l)}{\dot{I}(l)} = 171,47 e^{j0^\circ}; \\ U_1 = |\dot{U}(l)| &= 52,189 \text{ В}; \quad I_1 = |\dot{I}(l)| = 304,4 \text{ мА}. \end{aligned}$$

В конце линии ($x_K=0$) угол фазного сдвига между составляющими напряжения от прямой и обратной волн составляет $\alpha_1 = \arg A - \arg B = -90^\circ$. Экстремальные значения $U(x_K)$ будут наблюдаться в точках x_K , где угол α_1 равен нулю (максимум U) и 180° (минимум U).

Из выражения $\dot{U}(x_K)$ видно, что при изменении x_K фазы составляющих $\dot{U}(x_K)$ изменяются во встречных направлениях, т. е. в случае рассматриваемой линии с $\beta=9^\circ/\text{м}$ изменение угла α составляет $2\beta=18^\circ/\text{м}$. Поэтому в точке $x_K=5$ м будет наблюдаться максимум напряжения

$$\dot{U}(5) = A e^{j45^\circ} + B e^{-j45^\circ} = 50(\sqrt{3} + 1) e^{j15^\circ};$$

$$U_{\max} = 50(\sqrt{3} + 1) = 136,6 \text{ В.}$$

В точке $x_K=15$ м будет минимум напряжения

$$\dot{U}(15) = A e^{j135^\circ} + B e^{-j135^\circ} = 50(\sqrt{3} - 1) e^{j105^\circ};$$

$$U_{\min} = 50(\sqrt{3} - 1) = 36,6 \text{ В.}$$

Коэффициент бегущей волны

$$k_{\text{б.в.}} = U_{\min}/U_{\max} = 0,268.$$

13.18. Известно, что входные \dot{U}_1, I_1 и выходные \dot{U}_2, I_2 величины в линии с потерями ($\text{Re } \gamma \neq 0$) связаны уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + \underline{Z}_c I_2) e^{\underline{\gamma}l} + \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - \underline{Z}_c I_2) e^{-\underline{\gamma}l} = \\ &= \dot{U}_2 \text{ch } \underline{\gamma}l + \underline{Z}_c I_2 \text{sh } \underline{\gamma}l, \end{aligned} \quad (13.5)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2Z_c}(\dot{U}_2 + \underline{Z}_c I_2) e^{\underline{\gamma}l} - \frac{1}{2Z_c}(\dot{U}_2 - \underline{Z}_c I_2) e^{-\underline{\gamma}l} = \\ &= \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \text{sh } \underline{\gamma}l + I_2 \text{ch } \underline{\gamma}l. \end{aligned} \quad (13.6)$$

По условиям задачи $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = (5 + j20) 10^{-3}$, $\alpha = 5 \cdot 10^{-3}$ Нп/км, $\beta = 20 \cdot 10^{-3}$ рад/км, длина волны $\lambda = 2\pi/\beta = 314$ км; длина линии $l = 0,6\lambda = 188,5$ км; $\alpha l = 0,9425$ Нп; $\beta l = 3,77$ рад = 216° .

1. Для нахождения искомым величин U_2 и I_2 удобнее первая волновая форма записи \dot{U}_1 и I_1 . Подставляя в (13.5) выражение $\dot{U}_2 = Z_2 I_2$, получим для тока I_2 соотношение $I_2 = \dot{U}_1 / (A + B)$, где

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_c) e^{\underline{\gamma}l} = \frac{1}{2} \left(1000 + j1000 + 600 e^{-j10^\circ} \right) \times \\ &\times e^{0,9425} e^{j216^\circ} = 2341,8 e^{j245^\circ 25'}; \quad B = \frac{1}{2}(\underline{Z}_2 - \underline{Z}_c) e^{-\underline{\gamma}l} = \\ &= 229,4 e^{-j146^\circ 20'}. \end{aligned}$$

На выходе линии при $\dot{U}_1 = 100$ ток

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_1}{A+B} = 0,03937 e^{j117^\circ 19'}; \quad I_2 = 39,4 \text{ мА.}$$

Напряжение $\dot{U}_2 = \underline{Z}_2 \dot{I}_2 = 55,67 e^{j162^\circ 19'}; U_2 = 55,67 \text{ В.}$

Для нахождения \dot{I}_1 используем уравнение (13.6), откуда, учитывая условие $\dot{U}_2 = \underline{Z}_2 \dot{I}_2$, получим

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 (A-B) / \underline{Z}_c = 0,1411 e^{j15^\circ 57'}; \quad I_1 = 141,1 \text{ мА.}$$

Входное сопротивление линии

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1 = 708,8 e^{-j15^\circ 57'},$$

мощности на входе и выходе

$$P_2 = \text{Re } \dot{U}_1 \dot{I}_1^* = 13,565 \text{ Вт}; \quad P_2 = \text{Re } \dot{U}_2 \dot{I}_2^* = 1,55 \text{ Вт};$$

коэффициент полезного действия линии

$$\eta = P_2 / P_1 = 0,114.$$

2. Согласованный режим в линии наблюдается при равенстве сопротивления нагрузки волновому сопротивлению линии. В рассматриваемом примере $|\underline{Z}_2| > |\underline{Z}_c|$ и $\text{Re } \underline{Z}_2 > \text{Re } \underline{Z}_c$, поэтому дополнительное согласующее сопротивление $\underline{Z}_д$ должно быть подключено параллельно нагрузке (см. рис. 13.18, а). Условие согласованного режима $\underline{Z}_c = \underline{Z}_2 \underline{Z}_д / (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_д)$, откуда $\underline{Z}_д = \underline{Z}_2 \underline{Z}_c / (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_c) = 720 e^{-j34^\circ 40'}$.

Дополнительное сопротивление $\underline{Z}_д$ можно реализовать в виде последовательного соединения резистора с сопротивлением $R_д = |\underline{Z}_д| \cos 34^\circ 40' = 580 \text{ Ом}$ и конденсатора с емкостным сопротивлением

$$1/\omega C = |\underline{Z}_д| \sin 34^\circ 40' = 409 \text{ Ом.}$$

В согласованном режиме справедливы соотношения

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 e^{j\tau}; \quad \dot{I}_1 = \dot{I}_2 e^{j\tau}; \quad \dot{U}_1 / \dot{I}_1 = \dot{U}_2 / \dot{I}_2 = \underline{Z}_c,$$

откуда легко найти искомые величины.

13.19. Использовать уравнения (13.5) и (13.6), приведенные в решении задачи 13.18. Принять для случая $\underline{Z}_2 = 0$ напряжение $\dot{U}_2 = 0$, для случая $\underline{Z}_2 = \infty$ — ток $\dot{I}_2 = 0$.

13.23. Для решения задачи используем изображения напряжения и тока линии без потерь, полученные в [1] и приведенные в условии задачи 13.21. Сопротивление идеального источника напряжения равно нулю, следовательно, $Z_1(s) = 0$ и коэффициент отражения $W_1(s) = -1$. Для разомкнутого выхода линии $Z_2(s) = \infty$ и коэффициент отражения $W_2(s) = 1$. С учетом полученных значений

W_1 и W_2 , а также изображения напряжения источника $u(t) = U\delta_1(t) = 200\delta_1(t)$, имеющего вид $U/s = 200/s$, получим изображения напряжения и тока в любой точке x линии:

$$U(s, x) = \frac{200}{s} \left[e^{-\frac{sx}{v}} + e^{-\frac{s(2l-x)}{v}} - e^{-\frac{s(2l+x)}{v}} - e^{-\frac{s(4l-x)}{v}} + e^{-\frac{s(4l+x)}{v}} + \dots \right],$$

$$I(s, x) = \frac{2}{s} \left[e^{-\frac{sx}{v}} - e^{-\frac{s(2l-x)}{v}} - e^{-\frac{s(2l+x)}{v}} + e^{-\frac{s(4l-x)}{v}} + e^{-\frac{s(4l+x)}{v}} - \dots \right]$$

Напряжение и ток в виде бегущих волн с применением теоремы запаздывания (см. гл. 9)

$$u(t, x) = 200\delta_1(t - x/v) + 200\delta_1\left(t - \frac{2l-x}{v}\right) - 200\delta_1\left(t - \frac{2l+x}{v}\right) - 200\delta_1\left(t - \frac{4l-x}{v}\right) + 200\delta_1\left(t - \frac{4l+x}{v}\right) + \dots,$$

$$i(t, x) = 2\delta_1(t - x/v) - 2\delta_1\left(t - \frac{2l-x}{v}\right) - 2\delta_1\left(t - \frac{2l+x}{v}\right) + 2\delta_1\left(t - \frac{4l-x}{v}\right) + 2\delta_1\left(t - \frac{4l+x}{v}\right) + \dots$$

В начале линии ($x=0$)

$$u(t, 0) = 200\delta_1(t) + 200\delta_1(t - 2t_0) - 200\delta_1(t - 2t_0) - 200\delta_1(t - 4t_0) + 200\delta_1(t - 4t_0) + \dots = 200\delta_1(t);$$

$$i(t, 0) = 2\delta_1(t) - 2\delta_1(t - 2t_0) - 2\delta_1(t - 2t_0) + 2\delta_1(t - 4t_0) + 2\delta_1(t - 4t_0) + \dots = 2\delta_1(t) - 4\delta_1(t - 2t_0) + 4\delta_1(t - 4t_0) - \dots$$

Графики $u(t, 0)$ и $i(t, 0)$ показаны на рис. 13.23, а; при постоянном напряжении на входе линии, задаваемом источником, ток изменяется по периодическому закону с периодом $T = 4t_0 = 4l/v = 4l\sqrt{LC}$.

В середине линии ($x=l/2$)

$$u(t, l/2) = 200\delta_1(t - 0,5t_0) + 200\delta_1(t - 1,5t_0) - 200\delta_1(t - 2,5t_0) - 200\delta_1(t - 3,5t_0) + 200\delta_1(t - 4,5t_0) \dots$$

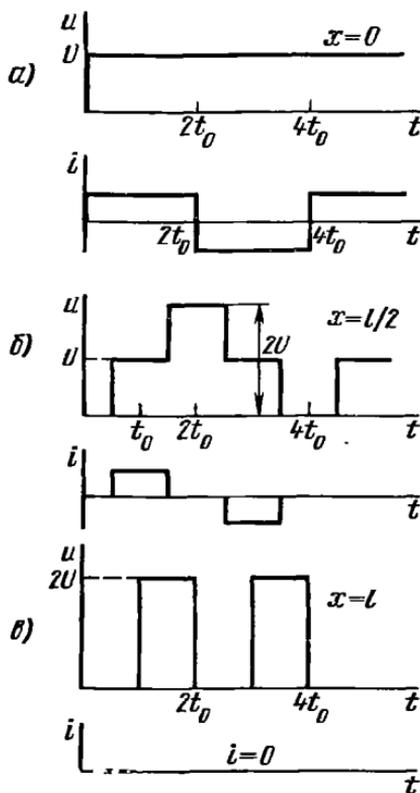


Рис. 13.23

$$i(t, l/2) = 2\delta_1(t - 0,5t_0) - 2\delta_1(t - 1,5t_0) - \\ - 2\delta_1(t - 2,5t_0) + 2\delta_1(t - 3,5t_0) + 2\delta_1(t - 4,5t_0) - \dots$$

Напряжение и ток в середине линии появляются с запаздыванием в $0,5 t_0$; колебания напряжения и тока происходят по более сложному (чем в начале линии) закону с периодом T (рис. 13.23, б).

В конце линии ($x=l$)

$$u(t, l) = 200\delta_1(t - t_0) + 200\delta_1(t - t_0) - \\ - 200\delta_1(t - 2t_0) - 200\delta_1(t - 3t_0) + \dots = 400\delta_1(t - t_0) - \\ - 400\delta_1(t - 3t_0) + \dots; \quad i(t, l) = 2\delta_1(t - t_0) - \\ - 2\delta_1(t - t_0) - 2\delta_1(t - 3t_0) + 2\delta_1(t - 3t_0) + \dots = 0.$$

Выход линии разомкнут, поэтому $i(t, l) = 0$, а напряжение изменяется по периодическому закону с периодом (рис. 13.23, в); величина напряжения достигает удвоенных значений по сравнению с напряжением источника за счет эффекта отражения ($W_2 = 1 > 0$).

13.25. При оценке установившегося значения тока $i(\infty) = \frac{2}{3} A$ использовать выражение суммы бесконечной геометрической прогрессии.

13.27. Коэффициенты отражения: на входе первой линии (точки 1—1') $W_1 = 0$ (так как $R_1 = \rho_1 = \rho$); на стыке линий (точки 2—2') для прямых волн $\vec{W}_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} = 0,5$ и для обратных волн $\vec{W}_2 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} = -0,5$; на нагрузке (точки 3—3') $W_3 = \frac{R_3 - \rho_2}{R_3 + \rho_2} = -0,5$.

Используя операторный метод (см. задачи 13.21 и 13.23), получим выражения напряжений.

В первой линии ($x \leq l_1$) будет существовать только одна прямая волна от источника (так как $W_1 = 0$) и обратные волны, в том числе: волна, отраженная от стыка линий, и волны, возникающие в конце второй линии. Последние волны преломляются при переходе в первую линию. Таким образом, напряжение в первой линии

$$u(t, x) = \frac{\rho_1 U}{R_1 + \rho_1} \delta_1\left(t - \frac{x}{v_1}\right) + \vec{W}_2 \frac{\rho_1 U}{R_1 + \rho_1} \delta_1\left(t - \frac{2l_1 - x}{v_1}\right) + \\ + u_{2 \text{ прел.}} = 20\delta_1\left(t - \frac{x}{v_1}\right) + 10\delta_1\left(t - \frac{2l_1 - x}{v_1}\right) + u_{2 \text{ прел.}}$$

Напряжение на входе второй линии ($x=l_1$), возникающее от прямой волны (с учетом эффекта отражения), определяется двумя первыми слагаемыми $u(t, x)$ при $x=l_1$, т. е. $u_1(t, l_1) = 30\delta_1(t - t_{01})$, где $t_{01} = t_0 = l_1/v_1$. Таким образом, при анализе процессов во второй линии можно считать, что к ее входу подключен источник $u_1(t, l_1)$.

Во второй линии ($l_1 \leq x \leq l_1 + l_2$) будет происходить отражение волн на концах линии с равными коэффициентами отражения $W_3 = \bar{W}_2 = -0,5$. В выражении напряжения для второй линии

$$u(t, x) = 30\delta_1 \left(t - t_{01} - \frac{x - l_2}{v_2} \right) - 15\delta_1 \left(t - t_{01} - \frac{2l_2 - x + l_1}{v_2} \right) + \\ + 7,5\delta_1 \left(t - t_{01} - \frac{2l_2 + x - l_1}{v} \right) - \dots$$

четные слагаемые характеризуют обратные волны, которые, достигнув стыка линий, преломляются и поступают в первую линию. Коэффициент преломления для напряжения $k_{np} = 1 + \bar{W}_2 = 0,5$; $t_{02} = l_2/v_2$.

Следовательно, возникшие в результате преломления обратные волны, создадут в первой линии напряжение

$$u_{2np} = -7,5\delta_1 \left(t - t_{01} - 2t_{02} - \frac{l_1 - x}{v_1} \right) - \\ - 1,875\delta_1 \left(t - t_{01} - 4t_{02} - \frac{l_1 - x}{v_1} \right) - \dots$$

Напряжение в точке $x = 0,5l_1 = 0,5l$ (с учетом того, что $t_{01} = \frac{l_1}{v_2} = \frac{l_2}{v_2} = t_{02} = t_0$)

$$u(t, l/2) = 20\delta_1(t - 0,5t_0) + 10\delta_1(t - 1,5t_0) - \\ - 7,5\delta_1(t - 3,5t_0) - 1,875\delta_1(t - 5,5t_0) - \dots$$

В точке $x = l_1 + l_2/2 = 2l$

$$u(t, 2l) = 30\delta_1(t - 1,5t_0) - 15\delta_1(t - 2,5t_0) + 7,5\delta_1(t - 3,5t_0) - \dots$$

Установившееся значение напряжений в линии $u(\infty, x) = 20$ В.

13.30. Для решения задачи используем изображения $U(s, x)$ и $I(s, x)$ для линии без потерь, приведенные в условии задачи 13.21. Для заданной цепи $Z_2 = R_1 = 50$; $Z_2 = sL = s \cdot 25 \cdot 10^{-3}$

$$\frac{\rho U(s)}{[Z_1 + \rho]} = \frac{120 \cdot 100}{s(100 + 50)} = \frac{80}{s}; \quad W_1 = \frac{Z_1 - \rho}{Z_1 + \rho} = \frac{R_1 - \rho}{R_1 + \rho} = -\frac{1}{3};$$

$$t_0 = l/v = 10^{-3} \text{ с}; \quad W_2 = \frac{Z_2 - \rho}{Z_2 + \rho} = \frac{sL - \rho}{sL + \rho} = \frac{s - \alpha}{s + \alpha};$$

$$\alpha = \frac{\rho}{L} = 4 \cdot 10^3 \text{ 1/с}; \quad \tau = 1/\alpha = \frac{1}{4} \cdot 10^{-3} = \frac{1}{4} t_0.$$

Следовательно, при учете трех слагаемых (трех волн)

$$U(s, x) = \frac{80}{s} e^{-\frac{sx}{v}} + \frac{80}{s} \frac{s - \alpha}{s + \alpha} e^{-s(2l - x)/v} - \\ - \frac{1}{3} \cdot \frac{80}{3} \cdot \frac{s - \alpha}{s + \alpha} e^{-s(2l + x)/v} + \dots,$$

$$I(s, x) = \frac{0,8}{s} e^{-sx/v} - \frac{0,8}{s} \cdot \frac{s-a}{s+a} e^{-s(2l-x)/v} - \frac{1}{3} \cdot \frac{0,8(s-a)}{s(s+a)} e^{-s(2l+x)/v} + \dots$$

Для изображения вида $\frac{1}{s} \cdot \frac{s-a}{s+a}$ оригинал равен

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} \cdot \frac{s-a}{s+a}\right] = [-1 + 2e^{-at}] \delta_1(t). \quad (13.7)$$

Полученная функция характеризует закон изменения напряжения и тока волны, возникающей в результате отражения от приемного конца линии.

График этой функции показан на рис. 13.30, а. На оси времени графика, кроме численных значений, указано время в долях от полного времени распространения волны вдоль линии $t_0 = l/v$. Используя выражение (13.7) и теорему запаздывания, получим выражения напряжения и тока в виде суммы бегущих волн:

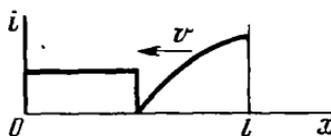
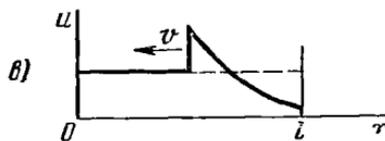
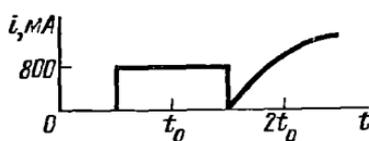
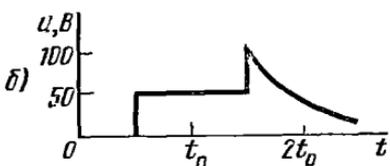
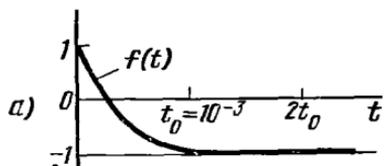


Рис. 13.30

$$u(t, x) = 80\delta_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + 80[-1 + 2e^{-a\left(t - \frac{2l-x}{v}\right)}] \times \delta_1\left(t - \frac{2l-x}{v}\right) - 26,6[-1 + 2e^{-a\left(t - \frac{2l+x}{v}\right)}] \times \delta_1\left(t - \frac{2l+x}{v}\right) + \dots,$$

ТОК В МА

$$i(t, x) = 800\delta_1\left(t - \frac{x}{v}\right) - 800[-1 + 2e^{-a\left(t - \frac{2l-x}{v}\right)}] \times \delta_1\left(t - \frac{2l-x}{v}\right) - 266[-1 + 2e^{-a\left(t - \frac{2l+x}{v}\right)}] + \dots$$

В частности, в точке линии с координатой $x=l/2$

$$u(t, x) = 80\delta_1(t - 0,5t_0) + 80[-1 + 2e^{-4 \cdot 10^3(t-1,5t_0)}] \delta_1(t - 1,5t_0) - 26,6[-1 + 2e^{-4 \cdot 10^3(t-2,5t_0)}] \delta_1(t - 2,5t_0) \dots,$$

$$i(t, x) = 800\delta_1(t - 0,5t_0) - 800[-1 + 2e^{-4 \cdot 10^3(t-1,5t_0)}] \delta_1(t - 1,5t_0) - 266[-1 + 2e^{-4 \cdot 10^3(t-2,5t_0)}] \delta_1(t - 2,5t_0) + \dots$$

Анализ последних выражений дает при

$$\begin{aligned}
 t < 0,5t_0, \quad u=0, \quad i=0; \\
 t \in [0,5t_0+; 1,5t_0-], \quad u=80 \text{ В}, \quad i=800 \text{ мА}; \\
 t \in [1,5t_0+; 2,5t_0-], \quad u=160 e^{-4 \cdot 10^8(t-1,5t_0)}, \\
 i=1600 - 1600 e^{-4 \cdot 10^8(t-1,5t_0)}; \\
 t \in [2,5t_0+; 3,5t_0-], \quad u=186,6 - 53,2 e^{-4 \cdot 10^8(t-2,5t_0)}, \\
 i=1866 - 532 e^{-4 \cdot 10^8(t-2,5t_0)}.
 \end{aligned}$$

Графики функций $u(t)$ и $i(t)$ для точки $x=l/2$ показаны на рис. 13.30, б.

На рис. 13.30, в изображено распределение напряжения и тока вдоль линии для момента $t=1,5t_0$. При этом в левой половине линии при $x \in [0; l/2-]$ напряжение и ток создаются прямой волной, распространяющейся в направлении оси x , а при $x \in [l/2+; l]$ — прямой волной и обратной волной, движущейся по направлению ко входу линии. При построении графиков $u(x)$ и $i(x)$ использован график рис. 13.30, а.

13.35. Коэффициенты отражения в начале и конце линии $W_1 = W_2 = 0$ (так как $R_1 = R_2 = \rho$), поэтому во второй половине линии существует только одна прямая волна, в первой — прямая и обратная.

Для первого участка линии сопротивление нагрузки $Z_{\text{н}} = Z\rho/(Z+\rho)$, так как второй участок линии присоединен параллельно сопротивлению Z . Так, например, для случая $Z=sL$

$$Z_{\text{н}} = \frac{sL\rho}{sL + \rho}; \quad W_{\text{н}} = \frac{Z_{\text{н}} - \rho}{Z_{\text{н}} + \rho} = \frac{-\rho^2}{2sL\rho + \rho^2}.$$

Изображения

$$\begin{aligned}
 U(s, x) &= \frac{0,5U}{s} \left[e^{-sx/v} + \frac{-\rho^2}{2sL\rho + \rho^2} e^{-s(2l_1-x)/v} \right] = \\
 &= \frac{30}{s} e^{-sx/v} - \frac{30}{s} \cdot \frac{\alpha}{s + \alpha} e^{-s(l-x)/v}; \\
 \alpha &= 2 \cdot 10^6 \text{ 1/с}.
 \end{aligned}$$

Напряжение в точке $x=l/4$

$$u(t, l/4) = 30\delta_1(t - 0,25t_0) - 30 \left[1 - e^{-2 \cdot 10^6(t-0,75t_0)} \right] \delta_1(t - 0,75t_0);$$

В точке $x=l$

$$u(t, l) = 30 e^{-2 \cdot 10^6(t-t_0)} \delta_1(t - t_0).$$

СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

В данной главе рассмотрены основные этапы синтеза линейных цепей: проблемы аппроксимации и реализации. Последняя осуществляется как пассивными, так и активными RC -цепями. При отборе материала главы наряду с задачами на методы синтеза, рассматриваемыми в учебной литературе, было решено показать:

1. Современные методы синтеза пассивных и активных RC -цепей.

2. Достижения в области создания новых схем активных и пассивных элементов, конверторов отрицательного сопротивления и генераторов.

3. Современные способы описания активных элементов и методы их получения (метод нуллов). В некоторых задачах анализа цепей использована теорема Теллегена. Для сравнения разных методов синтеза в ряде задач одна и та же функция цепи реализуется различными методами.

14.1. Найти минимально фазовые функции цепи по следующим дробно-рациональным выражениям квадрата модуля:

$$1) \frac{(1 - \omega^2)^2}{1 + \omega^6};$$

$$2) \frac{(2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}{\omega^2(2 - \omega^2)^2 + (1 - 2\omega^2)^2};$$

$$3) \frac{1 - \omega^2 + \omega^4}{(7\omega^4 - 12\omega^2 + 4)^2 + \omega^2(\omega^4 - 12\omega^2 + 10)^2}.$$

14.2. Найти функции цепи по следующим вещественным характеристикам:

$$1) R(\omega) = (1 - \omega^2)^2 / (1 + \omega^6);$$

$$2) R(\omega) = (4 + \omega^4) / [(1 - 2\omega^2)^2 + \omega^2(2 - \omega^2)^2].$$

14.3. В цепи, комплексная схема замещения которой показана на рис. 6.15, b двухполюсники Z_k содержат: Z_1 — индуктивность $L_1 = 1$ Гн; Z_2 — емкость $C_1 = 2$ Ф; Z_3 — последовательное соединение $L_2 = 2$ Г и $C_2 = 2$ Ф и Z_4 — $R = 1$ Ом, напряжение источника $u(t) = U_m \cos \omega t$. Определить энергетические функции цепи и величину входного сопротивления (по энергетическим функциям).

14.4р. Какая из следующих функций удовлетворяет условиям реализации входного сопротивления пассивной цепи?

$$1) \frac{4s^2 + 3s + 5}{2s^2 + 2s + 1}; \quad 2) \frac{7s^2 + 1}{4s^2 + 2s + 3};$$

$$3) s + 3 - \frac{3}{s + 3}.$$

14.5. Проверить положительность и вещественность следующей функции:

$$Z(s) = \frac{2s^4 + 5s^3 + 6s^2 + 3s + 1}{2s^4 + 4s^3 + 7s^2 + 7s + 3}.$$

14.6м. Показать, что для реактивных LC -двухполюсников с сопротивлением $Z(s)$ или проводимостью $Y(s)$ выполняются условия

$$\frac{dZ(s)}{ds} > 0; \quad \frac{dY(s)}{ds} > 0; \quad \frac{dx(\omega)}{d\omega} \geq \left| \frac{x}{\omega} \right|; \quad \frac{db(\omega)}{d\omega} \geq \left[\frac{b}{\omega} \right].$$

14.7. Функция сопротивления имеет нули при $s = -1, -3$ и -4 и полюсы при $s = -2$ и $-3,5$. При больших значениях s $Z(s)$ приближается к $s/20$. Найти аналитическое выражение для $Z(s)$. Определить величину вещественной части при нуле и бесконечности. Является ли $Z(s)$ сопротивлением двухполюсника RL - или RC -типов?

14.8р. Дана функция входного сопротивления цепи

$$Z(s) = \frac{(s^2 + 0,5)(s^2 + 2)}{s(s^2 + 1)(s^2 + 4)}.$$

Показать, что $Z(s)$ при $s = j\omega$ является функцией сопротивления реактивного двухполюсника. Найти канонические схемы, реализующие функции данного сопротивления.

14.9. Функция входной проводимости цепи $Y(s)$ имеет нули: $s_0^* = 0$; $s_{1,2}^* = \pm j\sqrt{2}$; $s_{3,4}^* = \pm j2$ и полюсы: $s_{1,2} = \pm j$; $s_{3,4} = \pm j\sqrt{3}$.

Известно также, что $\lim_{s \rightarrow \infty} Y(s)/s = 1$. Определить канонические схемы реализации данной функции проводимости или сопротивления $Z(s) = 1/Y(s)$.

14.10. Функция входной проводимости $Y(s)$ имеет нули и полюсы на оси $j\omega$. Характеристика $Y(j\omega)$ дана на рис. 14.10; $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Y(s)}{s} = 2$. Найти реализации по Кауэру и Фостеру для функций $Y(s)$ или $Z(s) = 1/Y(s)$.

14.11р. Функция входной проводимости имеет вид $Y(s) = \frac{s(s+2)}{(s+1)(s+3)}$. Из каких элементов состоит цепь, реализующая $Y(s)$?

Найти канонические реализации по Кауэру и Фостеру.

14.12. Даны функции входной проводимости цепи:

$$Y_1(s) = \frac{s(s+2)}{s^2 + s + 1}; \quad Y_2(s) = \frac{s^2 + 4}{s^2 + s + 4}.$$

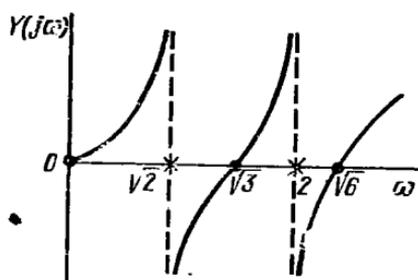


Рис. 14.10

Для каждой из функций найти реализующую схему с минимальным числом элементов.

14.13. Даны входные функции двухполюсных цепей:

$$Y_1(s) = \frac{s^2 + 3s + 3}{s^2 + 2s + 2}; \quad Y_2(s) = \frac{2s^2 + 2s + 1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}.$$

Для каждой из них найти одну реализующую схему лестничной структуры (рис. 14.13).

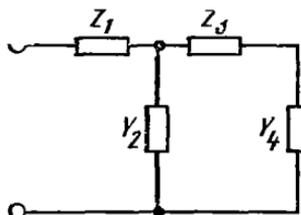


Рис. 14.13

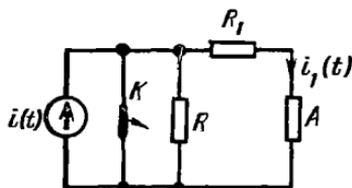


Рис. 14.14

14.14. В цепи (рис. 14.14) ток источника $i(t) = 3 - e^{-2t}$, $R = R_1 = 1$ Ом. В момент времени $t = 0$ размыкается ключ K . Ток, протекающий через резистор, $R_1 i_1(t) = 1 - e^{-2t}$ для $t \geq 0$; начальные условия — нулевые. Определить сопротивление $Z_A(s)$ двухполюсника A и найти его схему.

14.15. Пассивный двухполюсник, не содержащий запаса электромагнитной энергии, включается в момент времени $t = 0$ под действие источника напряжения $u(t) = 1 - e^{-10t}$ для $t \geq 0+$. Величина тока

$$i(t) = \frac{7}{10} - \frac{77}{40} e^{-10t} + \frac{49}{30} e^{-20t} - \frac{49}{120} e^{-50t}.$$

Определить функцию $Z_{вх}(s)$ и найти схему двухполюсника.

14.16. Пассивный двухполюсник, не содержащий запаса электромагнитной энергии, включается в момент времени $t = 0$ под действие источника постоянного напряжения $u(t) = 4$ В; $i(t) = -2(1 + e^{-2t})$ для $t \geq 0+$. Определить функцию $Z_{вх}(s)$ и найти схему цепи, реализующую $Z_{вх}(s)$.

14.17. Для симметричной скрещенной цепи, показанной на рис. 11.4, в, где Z_a является параллельным соединением $L = 3$ Гн и $C = 1/9$ Ф, а Z_b — последовательным соединением $L_2 = 2$ Гн и параллельной цепи из $C_2 = 1$ Ф и $L_3 = 1$ Гн. Определить параметры сопротивлений и проводимостей четырехполюсника. Проверить выполнение условий вычетов.

14.18. В цепи (см. рис. 11.4, в) двухполюсник Z_a состоит из последовательного соединения $C = 1$ Ф и параллельной RL -цепи, выполненной из элементов $L = 2$ Гн и $R = 1$ Ом; Z_b — последовательного соединения $R = 2$ Ом и параллельного контура с $L_1 = 1$ Гн и $C_1 = 1$ Ф. Проверить выполнение условий вычетов и вещественных частей.

14.19. Найти четырехполюсную LC -цепь лестничной структуры по параметрам матрицы сопротивлений $Z_{22} = \frac{s(s^2 + 4)}{s^2 + 1}$; $Z_{12} = \frac{1}{4} \cdot \frac{s(s^2 + 12)}{s^2 + 1}$ двумя способами: 1) начиная с выделения нуля передачи в $s = j\sqrt{0,5}$; 2) начиная с нуля передачи при нуле.

14.20р. Реализовать функцию передачи напряжения

$$H_U(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{K_0 s(s+3)}{(s+1)(s+4)(s+6) + 3(s+2)(s+5)}$$

с помощью лестничной RC -цепи. Определить коэффициент K_0 реализующих схем.

14.21. Реализовать функции передачи напряжения:

$$1) H_U(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{s-a}{s+a} \quad (a > 0);$$

$$2) H_U(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^2 + 3s + 1}$$

мостовой RC -цепью (фазовыми контурами).

14.22р. Реализовать способом параллельного соединения лестничных RC -структур (метод Гиллемина) функцию передачи по напряжению

$$H_U(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{s^2 + 2}{s^2 + 4s + 1}.$$

14.23. Реализовать по методу Гиллемина (см. задачу 14.22) функцию передачи по напряжению

$$H_U(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{s^2 + s + 2}{(s+2)(s+5)}.$$

14.24р. Реализовать способом параллельного соединения разветвленных RC -структур (метод Фиалкова — Герста) функцию передачи по напряжению с мнимыми нулями

$$H_U(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{s^2 + 1}{s^2 + 3,93s + 1}.$$

14.25. Реализовать по методу Фиалкова — Герста см. задачу 14.24) следующие функции передачи по напряжению с комплексными нулями:

$$1) H_{U1}(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^2 + 3,93s + 1}; \quad 2) H_{U2}(s) = \frac{s^2 + s + 2}{s^2 + 4 \frac{2}{3} s + 4 \frac{1}{3}}.$$

14.26. Известно, что квадрат модуля затухания фильтров Баттерворта выражается зависимостью $|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \omega^{2n}}$.

Определить выражение для полюсов $H(s)$ при любом n (порядок цепи). Найти максимальное значение добротности полюсов для случаев фильтра 4, 6 и 10-го порядков. Определить $H(s)$ для $n=5$.

14.27м. Определить передаточную функцию фильтра Баттерворта пятого порядка ($n=5$) с частотой среза, равной $0,5\omega_c$, где ω_c — табулированная частота. Принять $\omega_c=1$ и затухание на частоте среза равным 1 дБ.

14.28. Найти крутизну среза частотных характеристик фильтров Баттерворта и Чебышева при частоте среза $\omega_c=1$. Определить их отношение при неравномерности в полосе пропускания в 3 дБ.

14.29. Найти выражение для максимального значения добротности полюсов передаточных функций фильтров Чебышева и сравнить добротности данных фильтров с добротностями полюсов фильтров Баттерворта.

14.30. Синтезировать низкочастотный фильтр Баттерворта второго порядка с затуханием в 1 дБ при частоте среза 10 кГц и нагрузке $R=1$ кОм. К входу фильтра подключен источник напряжения.

14.31. Синтезировать низкочастотный фильтр Баттерворта второго порядка с затуханием в полосе пропускания 3 дБ и нулем передачи при $\omega_0=2$ рад/с, к входу фильтра подключен источник напряжения.

14.32. Найти порядок передаточной функции по напряжению фильтров Чебышева при неравномерности в полосе пропускания, составляющей 1 дБ, и затуханиях в 10 и 20 дБ при расстройках на 10 и 20% соответственно.

14.33. Определить необходимый порядок передаточной функции по напряжению фильтров Баттерворта при условиях, отмеченных в задаче 14.32.

14.34. Определить порядок передаточной функции по напряжению низкочастотного фильтра Бесселя (гладкая аппроксимация времени задержки) для замедления в 1 мкс, затухания в полосе прозрачности 3 дБ и отклонения задержки от номинального значения, не превышающего 1% на частоте 10 мГц.

14.35. Аппроксимировать с помощью переходной характеристики цепи 4-го порядка функцию времени в виде квадрата полупериода синусоиды

$$f(t) = \begin{cases} \sin^2 t, & 0 < t < \pi; \\ 0, & t > \pi. \end{cases}$$

Решить задачу методом рядов Фурье.

14.36. Решить задачу 14.35 по методу интерполяции в s -области.

14.37. Аппроксимировать по методу интерполяции в t -области импульс в виде целого числа ν полупериодов синусоиды

$$f(t) = \begin{cases} \sin \nu t, & 0 < t < \pi; \\ 0, & t > \pi. \end{cases}$$

Решить задачу для $\nu=3$ и 4.

14.38м. Определить матрицы $[a]$, $[z]$ и $[y]$ -параметров для схем с отрицательными сопротивлениями (рис. 14.38). Найти их входные сопротивления при произвольной нагрузке z_H . Какой характер имеет входное сопротивление при чисто реактивных нагрузках?

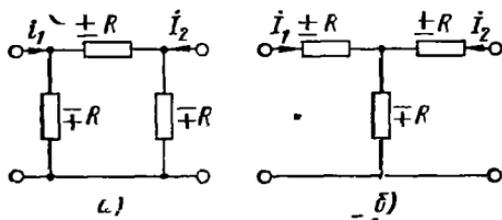


Рис. 14.38

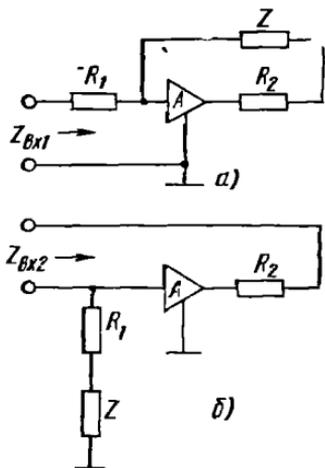


Рис. 14.39

14.39. Определить входные сопротивления схем (рис. 14.39), где A — коэффициент усиления по напряжению. Выбрать связь между R_1 , R_2 и A для реализации отрицательных сопротивлений.

14.40м. Реализовать входное сопротивление

$$Z(s) = \frac{-4s^3 - 16s^2 - 18s + 11}{2s^2 + 5s - 3}$$

цепью, содержащей элементы $\pm R$, C .

14.41р. Показать, что частное от деления любого полинома $A(s)$ с вещественными коэффициентами на полином $B(s)$ с различными отрицательными корнями можно представить в виде разности функций сопротивлений или проводимостей пассивных RC -цепей. Получить возможные реализации для входных сопротивлений и проводимостей.

14.42. Разложить полином $A(s) = s^3 + 2s^2 + 3s + 4$ на разность полиномов $C(s)$ и $D(s)$, каждый из которых содержит лишь вещественные отрицательные корни.

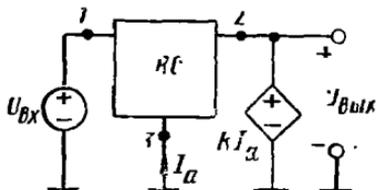


Рис. 14.43

14.43. Найти передаточную функцию по напряжению для цепи рис. 14.43. Здесь RC -цепь является трехполюсником, описываемым матрицей проводимостей $[y]$.

14.44. Определить входное сопротивление цепи, показанной на рис. 14.44. Выбрать величины k_1 и k_2 для получения гираторной

схемы, входное сопротивление которой должно быть обратно пропорционально сопротивлению Z .

14.45. Определить входное сопротивление цепи (рис. 14.45) при $R=10^6$ Ом и $C=1$ мкФ.

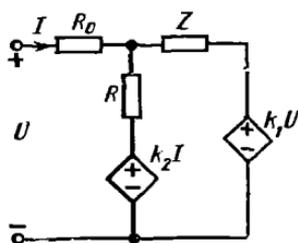


Рис. 14.44

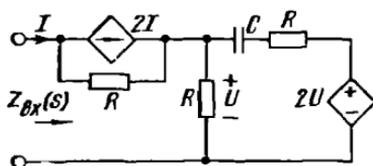


Рис. 14.45

14.46. Установить ограничения на величины k , Z_1 и Z_2 в каждой из схем (рис. 14.46), используемых для получения конверторов отрицательного сопротивления (Z_1 и Z_2 — некоторые функции входных сопротивлений двухполюсных элементов).

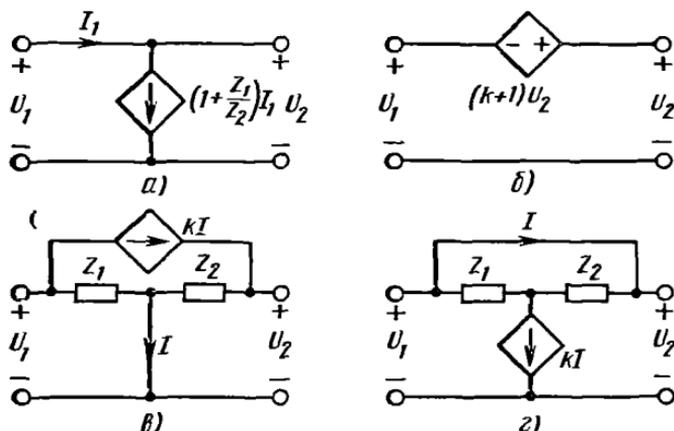


Рис. 14.46

14.47. В цепи (рис. 14.47), предложенной Э. Ку, k — коэффициент пропорциональности зависимого источника напряжения, управляемого напряжением, RC — пассивный четырехполюсник с известной матрицей проводимостей $[y]$. Найти передаточную функцию по напряжению $H_U(s) = \frac{U_{\text{ВНХ}}(s)}{U_{\text{ВХ}}(s)}$.

14.48р. Реализовать по схеме Э. Ку (рис. 14.47) следующую передаточную функцию по напряжению $H_U(s) = \frac{A_0}{s^2 + s + 1}$, где A_0 — некоторый постоянный коэффициент.

14.49м. Реализовать по методу Э. Ку следующие функции передачи по напряжению:

$$H_{U1}(s) = \frac{A_0(s^2 + 1)}{s^2 + s + 1}; \quad 2) \quad H_{U2}(s) = \frac{A_0(s^2 + 3)}{s^2 + s + 2}.$$

14.50. Определить функцию передачи по напряжению цепи, показанной на рис. 14.50 (сопротивления в омах, емкости в фарадах).

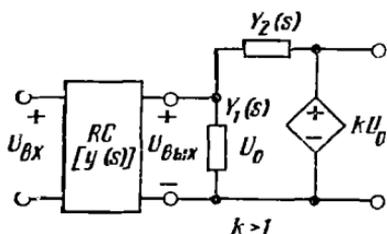


Рис. 14.47

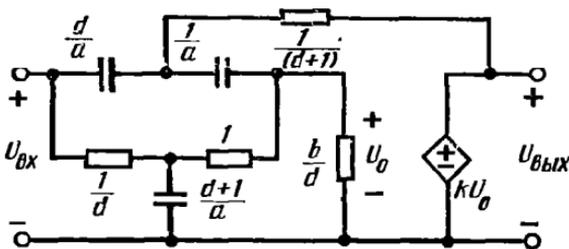


Рис. 14.50

Установить связь между параметрами a , b , k и d и коэффициентами реализуемой функции. Какие ограничения на передаточную функцию $H_U(s) = A_0 \frac{s^2 + a^2}{s^2 + \beta s + \gamma}$ накладывает предлагаемая реализация?

14.51. Реализовать передаточную функцию по напряжению $H_U(s) = (s^2 + 1)/(s^2 + s + 2)$ с использованием схемы, показанной на рис. 14.50.

14.52. Показать, что приведенные на рис. 14.52 схемы с операционными усилителями (ОУ) представляют собой зависимые источники напряжения, управляемые напряжениями с положительным (рис. 14.52, а) и отрицательным (рис. 14.52, б) коэффициентами усиления.

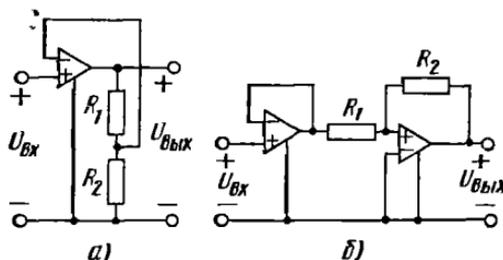


Рис. 14.52

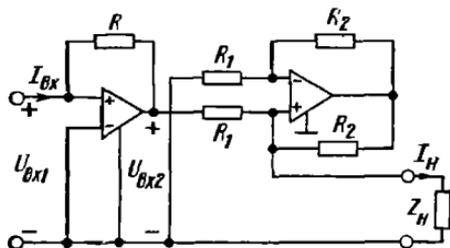


Рис. 14.53

14.53. Показать, что схема (рис. 14.53) имитирует источник тока, управляемый током с отрицательной величиной коэффициента усиления.

14.54. Доказать, что схема рис. 14.54 дает со стороны входных зажимов при выполнении условия $R_3 R_5 = R_2 R_4$ увеличенное значе-

ние C — так называемое умножение емкости. Какое сопротивление будет на входе цепи при взаимной замене элементов C и R_1 ?

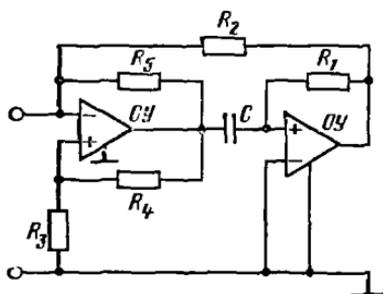
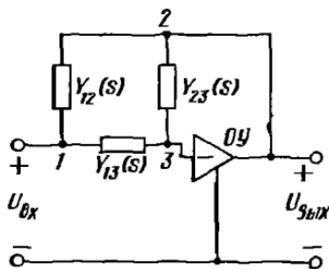


Рис. 14.54



а)

Рис. 14.55

14.55р. Определить $H_U(s) = U_{\text{вых}}(s)/U_{\text{вх}}(s)$ для схемы, показанной на рис. 14.55, и реализовать функцию $H_U(s) = \frac{s^2 + 4s + 5}{s^2 + 5s + 4}$.

Сравнить сложность реализующей цепи (количество активных и пассивных элементов) с результатами, полученными в задачах 14.50 и 14.51.

14.56. Синтезировать по методу, описанному в задаче 14.55, передаточную функцию по напряжению $H_U(s) = K \frac{(s+1)(s+4)}{s^2 + 6s + 10}$.

14.57. На рис. 14.57, а—з показаны нуллаторно-нораторные схемы (так называемые нулорные модели); сопротивления резистив-

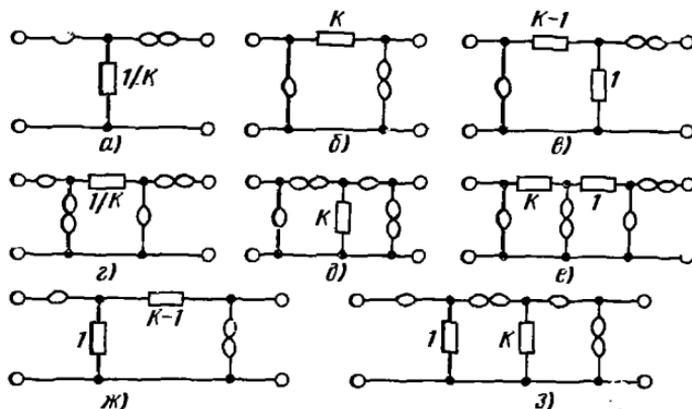


Рис. 14.57

ных элементов на схемах указаны в омах. Определить матрицы параметров передачи схем. Показать, что схемы рис. 14.57 являются моделями зависимых источников напряжения и тока.

14.58. Определить входное сопротивление цепи, показанной на рис. 14.58. Какие условия нужно выдержать в соотношениях сопротивлений элементов схемы, чтобы получить цепь, обладающую

свойствами положительного инвертора сопротивлений (гиратора)?
 Определить коэффициент гирации.

14.59. На рис. 14.59 показана цепь с тремя транзисторами. Принимая транзисторы идеальными и используя простейшие нулорные

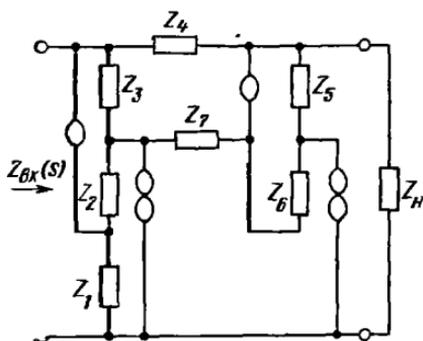


Рис. 14.58

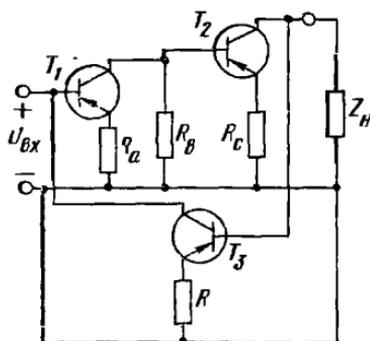


Рис. 14.59

схемы замещения транзисторов, определить входное сопротивление. Является ли данная цепь активной?

14.60. Определить функцию передачи по напряжению цепи (рис. 14.60) с одним нулором и двумя RC-трехполюсниками (элементы *a* и *b*). Предложить метод синтеза заданных функций на основе указанной схемы.

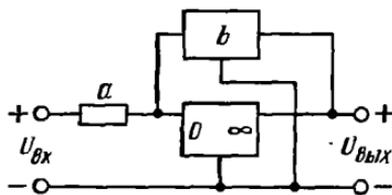


Рис. 14.60

14.61м. Используя методику синтеза на основе схемы задачи 14.60, реализовать функцию передачи по напряжению $H_U(s) = 1/(s^2 + s + 1)$. Показать, что данная конфигурация может быть распространена на синтез вектора передаточных функций

$$H_U(s) = - \left[\frac{A_1(s)}{B(s)} ; \frac{A_2(s)}{B(s)} ; \dots ; \frac{A_n(s)}{B(s)} \right]^t$$

14.62. Определить матрицу проводимостей цепи, показанной на рис. 14.62. Найти элементы матрицы при нагрузке $Z_H = 1/sC$. Какому четырехполюснику отвечает данная матрица проводимости?

14.63. Для нулорных моделей (рис. 14.63) построить дуальные схемы. Каким эквивалентным элементам соответствуют заданные и дуальные схемы? Предложить реализации заданных и дуальных цепей с использованием идеальных транзисторов.

14.64р. На рис. 14.64 показана цепь, содержащая конвертор отрицательного сопротивления с инверсией напряжения (КОСН) и RC-четыреполюсник с известной матрицей $[Z(s)]$. Определить входное сопротивление цепи и предложить метод реализации заданных функций $Z_{вх}(s)$ (метод Кинаривалы).

14.65. Реализовать по методу, приведенному в решении задачи 14.64, входное сопротивление $Z_{вх}(s) = (s^2 + s + 1)/(s^2 + s + 2)$.

14.66. На рис. 14.66 показана схема цепи с конвертором отрицательного сопротивления КОС и двумя RC-четырёхполюсниками (схема Линвилла); предполагаются заданными матрицы сопротив-

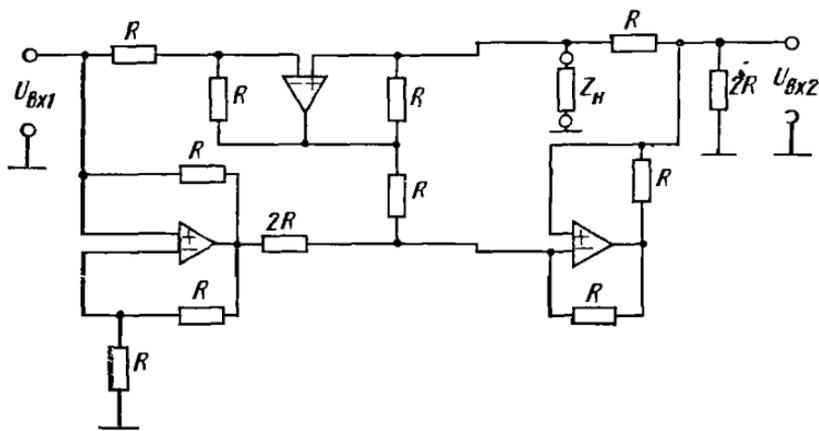


Рис. 14.62

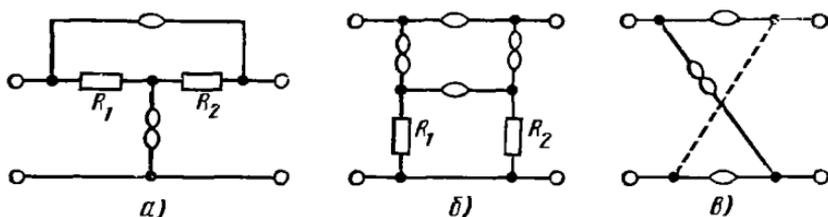


Рис. 14.63

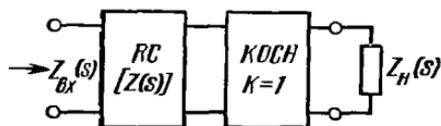


Рис. 14.64

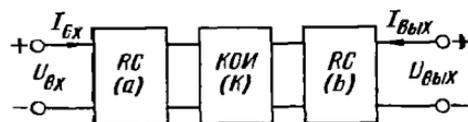


Рис. 14.66

лений четырехполюсников и коэффициент конверсии K для КОС. Найти выражения передаточного сопротивления $z_T(s) = U_{вых}(s)/I_{вх}(s)$, передаточной проводимости $Y_T(s) = I_{вых}(s)/U_{вх}(s)$ и функций передачи по напряжению и току. Рассмотреть варианты КОС с инверсией тока (КОСТ) и инверсией напряжения (КОСН).

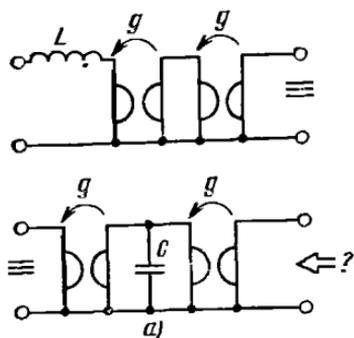
14.67. Реализовать по методу Линвилла (задача 14.66) сопротивления передачи:

$$1) z_{T1}(s) = \frac{3}{s^2 + s + 1}; \quad 2) z_{T2}(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2 + s + 1};$$

$$3) z_{T3}(s) = \frac{s^2 + 2s + 2}{s^2 + s + 1}.$$

14.68. Показать эквивалентность схем, приведенных на рис. 14.68 (на рисунке эквивалентность указана символом \equiv). Какие цепи они имитируют со стороны входа и выхода? Как следует выбрать величины C и C_0 ?

14.69. На схеме (рис. 14.69) A - и B -трехполюсники, имеющие матрицы $[Y(s)]$ или $[Z(s)]$; γ — сопротивление гирации гиратора. Определить передаточное сопротивление $z_T(s)$, передаточную проводимость $Y_T(s)$ и функции передачи по напряжению и току.



а)

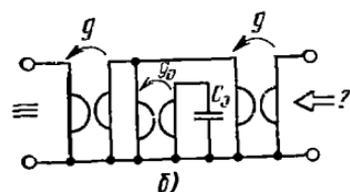
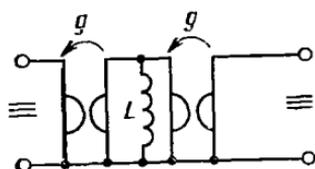
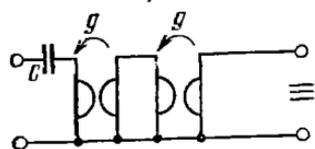


рис. 14.68

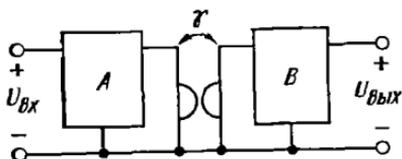


рис. 14.69

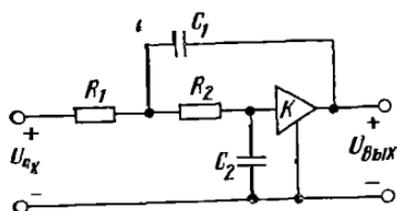


рис. 14.71

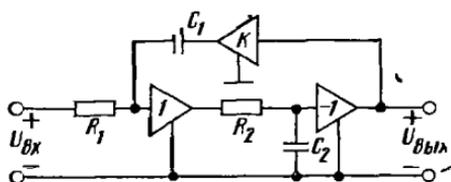


рис. 14.72

14.70. Реализовать функцию передачи по напряжению $H_U(s) = A/[(s+a)^2 + b^2]$ с помощью схемы, показанной на рис. 14.69.

14.71р. Для цепи (рис. 14.71) найти выражения чувствительностей добротности S^Q и резонансной частоты S^{ω_0} по отношению к коэффициенту усиления усилителя K и величинам $m=R_1/R_2$ и $n=C_1/C_2$. Вычислить чувствительности при $m=1$ и $S_m^Q=0$, т. е. условиях, используемых при перестройке схемы по частоте.

14.72м. Определить функцию передачи по напряжению и чувствительности добротности и резонансной частоты цепи (рис. 14.72) по отношению к коэффициенту усиления K и величинам $m=R_1/R_2$ и $n=C_1/C_2$.

14.73. Реализовать функцию передачи по напряжению

$$H_U(s) = K_0 \frac{s^2 + a_1s + a_0}{s^2 + b_1s + b_0}$$

на основе схемы рис. 14.73; определить выражения для величин параметров элементов этой схемы через коэффициенты $H_U(s)$. Вычислить чувствительности Q и ω_0 по отношению к усилению K и величинам $m = R_1/R_2$ и $n = C_1/C_2$ при $S_m^Q = 0$.

14.74. Установить прямые и обратные зависимости между входными и передаточными сопротивлениями, а также функциями передачи по току и напряжению для цепей RC и LC при замене индуктивных элементов на резистивные.

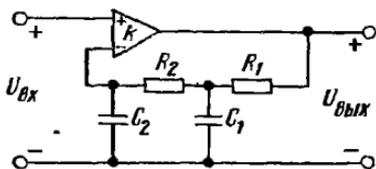


Рис. 14.73

14.75. Установить прямые и обратные зависимости для входных и передаточных сопротивлений, а также функций передач по напряжению и току для преобразования $RC \rightarrow CR$, при котором каждый R -элемент исходной цепи заменяется емкостью

$1/R$ Ф — в преобразуемой, а каждая емкость C замещается резистором $1/C$ Ом. Где можно использовать это преобразование?

14.76. Определить чувствительность функций передачи $H_{U3} = U_{R3}/U$ и $H_{U5} = U_{R5}/U$ для R -цепи (см. рис. 2.20) к изменению величин сопротивлений R_k ($R_2 = 1$ Ом, $R_3 = 2$ Ом, $R_4 = 1$ Ом, $R_5 = 1$ Ом), т. е. $\frac{\partial H_{Ui}}{\partial R_k}$; $k = 2, 3, 4, 5$; $i = 3, 5$.

14.77. R -цепь (рис. 14.77) находится под воздействием источников напряжения U_1 и тока I_2 . Определить чувствительности тока I_1 и напряжения U_2 к отклонениям величин сопротивлений R_1 и R_2 .

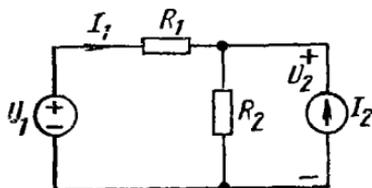


Рис. 14.77

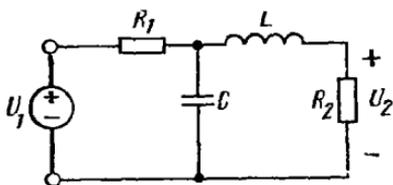


Рис. 14.79

14.78. Определить относительные чувствительности функции передачи дифференцирующей RC -цепи к изменениям величин R , C и ω , т. е. $S_{x_i}^{H_U} = \frac{x_i}{H_U} \cdot \frac{\partial H_U}{\partial x_i}$, где $x_i = R, C, \omega$.

14.79. Используя метод присоединенной цепи, определить операторные выражения относительных чувствительностей $H_U(s) = U_2(s)/U_1(s)$ к изменениям C и L (рис. 14.79).

14.80. Показать, что при описании цепи через гибридные параметры присоединенная схема отвечает уравнениям

$$\begin{bmatrix} [\hat{I}]_I \\ [\hat{U}]_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [H]_{11}^t & -[H]_{21}^t \\ -[H]_{12}^t & [H]_{22}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\hat{U}]_I \\ [\hat{I}]_{II} \end{bmatrix}$$

где $[\hat{U}]$, $[\hat{I}]$ — напряжения и токи ветвей присоединенной цепи; индексы I и II относятся к зажимам с источниками напряжения и тока соответственно; t — знак транспонирования матриц.

РЕШЕНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

14.4. Рассмотрим первую из заданных функций

$$Z(s) = \frac{4s^2 + 3s + 5}{2s^2 + 2s + 1} = \frac{M(s)}{N(s)}$$

Все коэффициенты полиномов $M(s)$ и $N(s)$ положительны, нули [корни $M(s)=0$] и полюсы [корни $N(s)=0$] располагаются в левой полуплоскости так, что $M(s)$ и $N(s)$ являются полиномами Гурвица.

Числитель вещественной части $Z(j\omega) = M(j\omega)/N(j\omega)$ равен $8\omega^4 - 8\omega^2 + 5$ или при $\omega^2 = x$ $P(x) = 8x^2 - 8x + 5$. Для проверки неотрицательности вещественной части $Z(j\omega)$ составляем ряд функций Штурма: $P(x) = 8x^2 - 8x + 5$; $P'(x) = 16x - 8$; $P_1(x) = 4x - 5$; $P_2(x) = -12$. Здесь $P_1(x)$ — взятый с обратным знаком остаток от деления P на P' и т. д.

Знаки функций ряда Штурма:

$$\begin{array}{cccccc} P & P' & P_1 & P_2 & n, & \\ x=0 & + & - & - & - & 1, \\ x=\infty & + & + & + & - & 1. \end{array}$$

Число положительных вещественных корней $n(0) - n(\infty) = 0$, следовательно, вещественная часть $z(j\omega)$ является положительной вещественной функцией (п. в. ф.) Аналогичный анализ показывает, что вторая из заданных функций не отвечает условиям п. в. ф., а третья — отвечает.

Отметим, что для рациональной дроби второго порядка проверку на условия п. в. ф. можно выполнить без использования теоремы Штурма.

14.6. Воспользуйтесь энергетическими функциями, полагая $F_0=0$.

14.8. Двухполюсник является реактивным, если $Z_{вх}(s)$ и $Y_{вх}(s)$ есть отношение полиномов, один из которых четной степени s , а второй — нечетной. Нули и полюсы $Z_{вх}$ и $Y_{вх}$ должны располагаться в плоскости s на оси мнимых частот и чередоваться друг с другом. У заданной функции $Z_{вх}(s)$ нули: $s'_{1,2} = \pm j \sqrt{0,5}$; $s_{3,4} = \pm j \sqrt{2}$; полюсы: $s_{1,2} = \pm j1$; $s_{3,4} = \pm j2$; $s_0 = 0$. Расположение нулей и полюсов

показано на рис. 14.8, а—г. Заданная функция $Z(s)$ является сопротивлением реактивного двухполюсника.

Канонические схемы можно получить разложением $Y(s) = 1/Z(s)$ в непрерывную дробь (метод Каузера) или на простые дроби (метод Фостера). Для первого способа разложения используем схему (рис. 14.8, б); для второго — схему (рис. 14.8, в). В последнем случае

$$Z(s) = \frac{1/4}{s} + \frac{(1/6)s}{s^2 + 1} + \frac{(7/12)s}{s^2 + 4}.$$

Разложение $Y(s)$ на простые дроби (второй вид разложения по Фостеру) дает

$$Y(s) = s + \frac{(7/6)s}{s^2 + 0,5} + \frac{(4/3)s}{s^2 + 2}.$$

Реализация $Y(s)$ представлена на рис. 14.8, г.

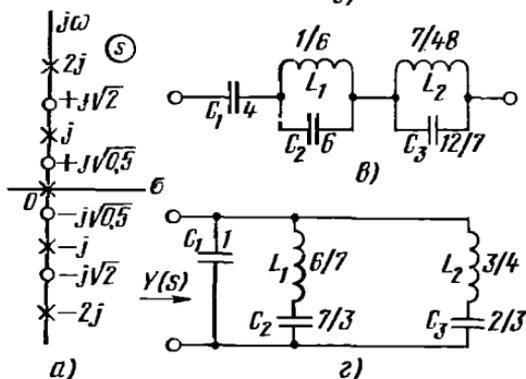
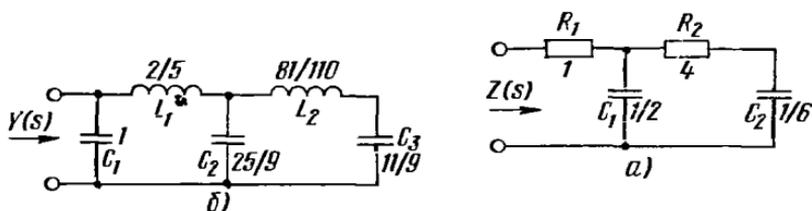


Рис. 14.8

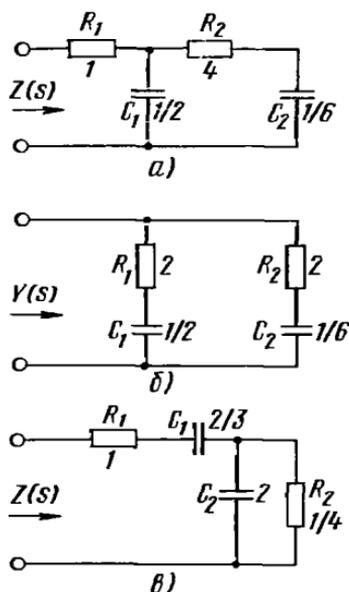


Рис. 14.11

14.11. Двухполюсник содержит RL - и RC -элементы, если: 1) $Y_{вх}(s)$ и $Z_{вх}(s)$ цепи являются дробно-рациональными функциями s ; 2) нули и полюсы $Y_{вх}$ и $Z_{вх}$ простые и расположены в плоскости s на оси вещественных в левой полуплоскости; 3) нули и полюсы чередуются: 4) у функции $Y(s)$ для RC -цепи ближайшим к началу координат является нуль, а для RL -цепи — полюс. В частном случае нуль Y_{RC} и полюс Y_{RL} могут находиться в начале плоскости s .

Заданная функция $Y(s)$ является проводимостью RC -цепи. Для получения канонических схем выражение $Z(s) = 1/Y(s)$ расклады-

ваем в непрерывную дробь или представляем $Y(s)$ и $Z(s)$ в виде сумм простых дробей

$$Z(s) = 1, Y(s) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}s + \frac{1}{4 + \frac{1}{\frac{1}{6}s}}} \dots;$$

$$Y(s) = \frac{(1/2)s}{s+1} + \frac{(1/2)s}{s+3} \dots;$$

$$Z(s) = 1 + \frac{3}{2 \cdot s} + \frac{1/2}{s+2}.$$

Схемы, соответствующие полученным разложениям $Y(s)$ и $Z(s)$, показаны на рис. 14.11, а-в.

14.20. Известно, что $H_U(s) = U_2(s)/U_1(s) = -y_{21}(s)/[y_{22}(s) + 1]$, поэтому

$$y_{21}(s) = \frac{-K(s+3)s}{3(s+2)(s+5)}; \quad y_{22}(s) = \frac{(s+1)(s+4)(s+6)}{3(s+2)(s+5)}; \quad Y_H = 1.$$

Реализацию начинаем с выделения резистивного и емкостного элементов со стороны выхода

$$y_{22}(s) = \frac{1}{3}s + 0,8 + \frac{1,6s^2 + 7,2s}{3(s+2)(s+5)} = \frac{1}{3}s + 0,8 + Y_1(s);$$

$$Z_1(s) = 1/Y_1(s).$$

Из сопротивления $Z_1(s)$ удаляем резистор и выделяем частично полюс при $s=0$ для формирования нуля проводимости передачи $y_{21}(s)$ при $s=-3$.

$$Z_1(s) = \frac{3(s+2)(s+5)}{1,6s^2 + 7,2s} = \frac{15}{8} + \frac{75}{16} \frac{s+4}{(s+9/2)s}, \quad \text{причем}$$

$$\left[\frac{75}{16} \frac{s+4}{(s+9/2)s} - \frac{K}{s} \right] \Big|_{s=-3} = 0, \quad \text{откуда } K = 25/8.$$

Таким образом

$$Z_1(s) = \frac{15}{8} + \frac{25}{8 \cdot s} + \frac{25}{16} \cdot \frac{s+3}{s(s+9/2)} = \frac{15}{8} + \frac{25}{8s} + Z_2(s);$$

$$Y_2(s) = 1/Z_2(s).$$

По сопротивлению $Z_2(s)$, имеющему полюс при $s=-3$, находим проводимость $Y_2(s)$, у которой полюс $s=-3$ выделяется полностью, т. е.

$$Y_2(s) = \frac{16}{15}s + \frac{24}{25} \frac{s}{s+3}.$$

Оставшееся емкостное сопротивление $25/(16s)$, реализуемое емкостью $16/25$ Ф, дает нуль передачи при $s=0$. Полная реализация цепи показана на схеме рис. 14.20, величины параметров элементов даны в омах и фарадах, $K_0=8,5$.

14.22. Представим заданную функцию $H_U(s)$ через параметры проводимости двух четырехполюсников

$$H_U(s) = \frac{-y_{12a}(s) - y_{12b}(s)}{y_{22}(s)} = \frac{s^2 + 2}{s^2 + 4s + 1}$$

Разделим числитель и знаменатель $H_U(s)$ на вспомогательный полином с отрицательными вещественными корнями $M(s)=s+1$. Таким образом, получим параметры проводимости четырехполюсников в следующем виде:

$$-y_{12a}(s) = \frac{s^2}{s+1}; \quad -y_{12b}(s) = \frac{2}{s+1};$$

$$\frac{y_{22}(s)}{s+1} = \frac{s^2 + 4s + 1}{s+1}$$

Реализация $y_{12}(s)$ по $y_{22}(s)$ в виде лестничной цепи приведет к рис. 14.22, а (разложение в непрерывную дробь).

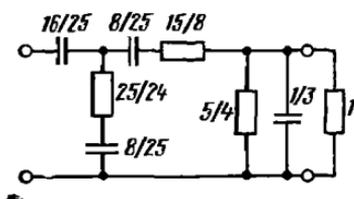


Рис. 14.20

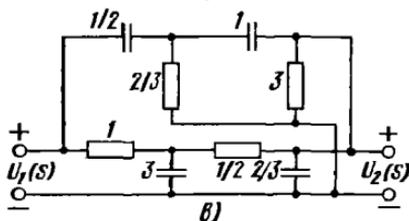
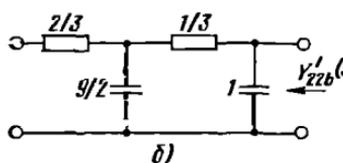
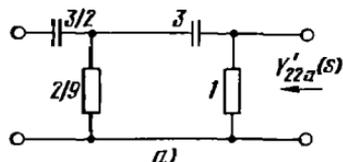


Рис. 14.22

Реализация $-y_{12b}(s)$ по $y_{22}(s)$ приведет к рис. 14.22, б.

Определяя постоянные передачи для цепей а и б, получим $a_a=1$, $a_b=2$. Реализованные схемы дают $-y'_{12a}(s)|_{s \rightarrow \infty} = s$ и $y_{12b}(s)|_{s \rightarrow 0} = 1$, т. е. искомые коэффициенты для изменения уровня параметров цепей составят $H_a=1$, $H_b=1$.

Искомый коэффициент пропорциональности

$$K = \frac{1}{\frac{a_a}{H_a} + \frac{a_b}{H_b}} = \frac{1}{3}$$

Отсюда следует, что уровень проводимостей цепи «а» необходимо увеличить в $1/3$, а цепи «б» в $2/3$ раза.

Полная реализация отображена на рис. 14.22, в (величины в омах и фарадах).

14.24. Выберем вспомогательный полином с вещественными отрицательными корнями $M(s)$. Пусть $M(s) = s + 1,41$, тогда $y_{12}(s) = \frac{s^2 + 1}{s + 1,41}$; $y_{22}(s) = \frac{s^2 + 3,93s + 1}{s + 1,41}$. Разобьем $y_{12}(s)$ и $y_{22}(s)$ на следующие суммы:

$$y_{12}(s) = y'_{12}(s) + y''_{12}(s) = \frac{1}{s + 1,41} + \frac{s^2}{s + 1,41};$$

$$y_{22}(s) = y'_{22}(s) + y''_{22}(s) = \frac{s + 1}{s + 1,41} + \frac{s^2 + 2,93s}{s + 1,41}.$$

Передача четырехполосника со штрихом $H'_U = 1/(s + 1)$, а с двумя штрихами $H''_U(s) = s/(s + 2,93)$. Кроме того, $1/y'_{22}(\infty) = 1$; $1/y'_{22}(0) = 1,41/2,93s$, а полная реализация показана на рис. 14.24 (величины даны в омах и фарадах).

14.27. Воспользоваться преобразованием частоты $s \rightarrow \frac{\varepsilon \frac{1}{n} s}{\omega_{с1}}$,

где $\omega_{с1}$ — заданная частота среза.

14.38. Расчеты произвести для какой-либо одной из цепей, показав предварительно их эквивалентность, преобразуя треугольник в звезду, и наоборот.

14.40. Использовать результаты решения задачи 14.38 для замены отрицательных индуктивных элементов через положительные емкости.

14.41. Докажем, что если степень $A(s)$ меньше или равна степени $B(s)$, то получается разность RC -сопротивлений. При разложении заданной функции получим

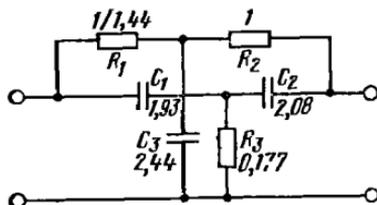


Рис. 14.24

$$\frac{A(s)}{B(s)} = K_{\infty}^+ + \frac{K_0^+}{s} + \sum_{(i)} \frac{K_i^+}{s + \sigma_i} - K_{\infty}^- - \frac{K_0^-}{s} - \sum_{(j)} \frac{K_j^-}{s + \sigma_j},$$

причем максимальное число $(i + j)$ соответствует степени полинома $B(s)$, равной в общем случае n .

Обозначим через Z_{RC}^I и Z_{RC}^{II} следующие суммы:

$$Z_{RC}^I = K_{\infty}^+ + \frac{K_0^+}{s} + \sum_i \frac{K_i^+}{s + \sigma_i}; \quad Z_{RC}^{II} = K_{\infty}^- + \frac{K_0^-}{s} + \sum_{(j)} \frac{K_j^-}{s + \sigma_j}.$$

Здесь $B(s) = (s + \sigma_1)(s + \sigma_2) \dots (s + \sigma_n)$ и

$$|\sigma_1| < |\sigma_2| < |\sigma_3| < \dots < |\sigma_n|.$$

Аналогично можно доказать случай разности двух проводимостей пассивных RC -цепей, когда $A(s) \leq B(s) + 1$.

Возможная реализация для первого случая дана на рис. 14.41, а, для второго — на рис. 14.41, б, где КОС — конвертор отрицательного сопротивления.

14.48. Выберем вспомогательный полином $M(s)$ с отрицательными вещественными корнями, степень которого больше или равна максимальной степени числителя (знаменателя) $H_U(s) = 1$, т. е. в данном случае, например, $M(s) = s + 1$.

$$H_U(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{A(s)M(s)}{B(s)M(s)} = \frac{-y_{21}(s)}{1 + y_{22}(s) - (K-1)Y_2(s)}; \quad Y_1 = 1,$$

$$\frac{B(s)}{sM(s)} = \frac{s^2 + s + 1}{s(s+1)} = 1 + \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}; \quad \frac{B(s)}{M(s)} = s + 1 - \frac{s}{s+1},$$

но $B(s)/M(s) = 1 + y_{22}(s) - (K-1)Y_2(s)$. Положим $y_{22}(s) = K'_0 + K''_0 s + \frac{K'_1 s}{s+1}$, а $(K-1)Y_2(s) = K''_0 + K'_1 s/(s+1)$, тогда получим систему

$$K'_0 - K''_0 = K_0 = 0,$$

$$K'_1 - K''_1 = 1.$$

Пусть $K'_1 = 2$; $K''_0 = 1$, тогда $K'_1 = 1$ и $K''_0 = 1$. В этом случае $y_{22}(s) = 1 + s + s/(s+1)$; $Y_2(s)(K-1) = 1 + 2s/(s+1)$; $y_{21}(s) = -A_0/(s+1)$; при $K=2$ $Y_2(s) = 1 + 2s/(s+1)$. Реализация $H_U(s)$ показана на рис. 14.48.

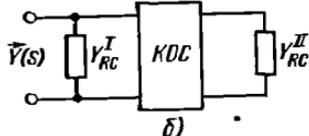
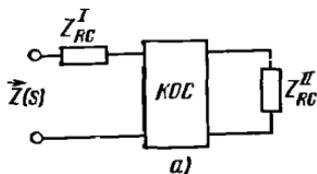


Рис. 14.41

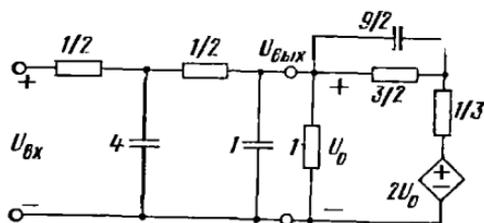


Рис. 14.48

Примечание. Резисторы 1 и 1/3 могут учитывать входное и выходное сопротивления усилителя напряжения, что играет важную практическую роль при синтезе цепей. Чему равно A_0 ?

14.49. При реализации комплексных нулей передачи используйте метод синтеза Гиллемина — суммирование параллельных RC-цепей.

14.55. Запишем уравнения для напряжений узлов 1, 2, 3 цепи рис. 14.55. Уравнение для 3 узла имеет вид

$$I_3 = y_{31}(s)U_1(s) + y_{32}(s)U_2(s) + y_{33}(s)U_3(s).$$

Но $U_3(s) = 0$, $I_3(s) = 0$ (свойство идеального ОУ).

Отсюда

$$H_U(s) = \frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = + \frac{y_{31}(s)}{y_{32}(s)} = + \frac{y_{13}(s)}{y_{23}(s)} = \frac{A(s)}{B(s)}.$$

Выберем вспомогательный полином $M(s)$ с вещественными отрицательными корнями, как это обычно имеет место при реализации активных цепей:

$$H_U(s) = \frac{A(s)/M(s)}{B(s)/M(s)}; \quad y_{13}(s) = \frac{A(s)}{M(s)}; \quad y_{23}(s) = \frac{B(s)}{M(s)}.$$

Введем вспомогательный коэффициент k так, чтобы сумма $kA(s) + B(s)$ представляла собой полином с вещественными коэффициентами, т. е. $k(s^2 + 4s + 5) + s^2 + 5s + 4 = (1+k)s^2 + (4k+5)s + (5k+4)$. При этом $[kA(s) + B(s)]/M(s)$ должна быть RC-функцией. При выборе $M(s) = s + 2$ и $k = 1$ получим $kA(s)/B(s) = (s^2 + 4s + 5)/(s + 2) = s + 2 + \frac{1}{s + 2}$; $\frac{B(s)}{M(s)} = \frac{s^2 + 5s + 4}{s + 2} = s + 2 + \frac{s}{s + 2}$.

Воспользуемся формулами преобразования треугольника в звезду. Тогда из условия получения простейшего реализуемого сопротивления Z_1 найдем $y_{12} = s/(s + 2)$, так как

$$\frac{(s + 2)/y_{12}}{\frac{1}{y_{12}} + s + 2 + \frac{s + 2}{s}} = 1 = Z_1; \quad Z_2 = \frac{1}{s}; \quad Z_3 = 1.$$

Реализация составит (при выделении первых двух членов $y_{13}(s)$ и $y_{23}(s)$ в виде параллельных ветвей) рис. 14.55, б. Окончательная схема показана на рис. 14.55, в (на схеме величины элементов указаны в омах и фарадах).

14.61. При доказательстве воспользуйтесь свойствами нулора на входе: $U_{\text{вх}} = 0$, $I_{\text{вх}} = 0$. Реализацию нулей легко осуществить параллельным включением RC-цепей (метод Гиллемина).

14.64. Из уравнений четырехполюсника по z -параметрам с учетом ограничений от КОСН можно получить:

$$Z_{\text{вх}}(s) = z_{11}(s) - \frac{z_{12}^2(s)}{z_{22}(s) - Z_{\text{н}}(s)} \quad \text{при} \quad [z] = \begin{bmatrix} z_{11}(s) & z_{12}(s) \\ z_{21}(s) & z_{22}(s) \end{bmatrix}.$$

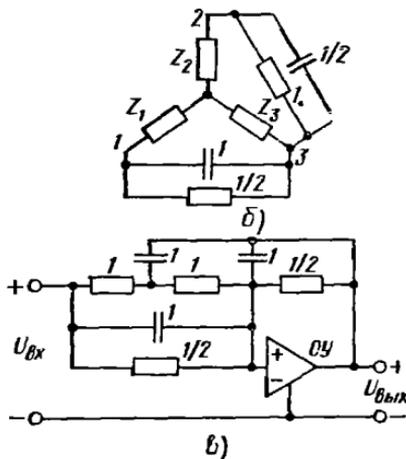


Рис. 14.55

По заданной $Z_{\text{вх}}(s) = A(s)/B(s)$ выбираем полином $M(s)$ с отрицательными вещественными корнями и степенью равной или большей максимальной степени числителя или знаменателя $Z_{\text{вх}}(s)$. Далее

$$Z_{\text{вх}}(s) = \frac{A(s)}{B(s)} \frac{M(s)}{M(s)} = \frac{A_1(s)M_1(s) - A_2(s)M_2(s)}{B_1(s)M_1(s) - B_2(s)M_2(s)}; \quad (14.1)$$

$$M(s) = M_1(s)M_2(s).$$

Производя очевидные преобразования, найдем:

$$Z_{\text{вх}}(s) = \frac{A_2(s)}{B_2(s)} = \frac{\frac{B_1(s)A_2(s) - A_1(s)B_2^*(s)}{B_2^2(s)}}{\frac{B_1(s)}{B_2(s)} - \frac{M_1(s)}{M_2(s)}}; \quad z_{11}(s) = \frac{A_2(s)}{B_2(s)};$$

$$z_{22}(s) = \frac{B_1(s)}{B_2(s)}; \quad Z_{\text{н}} = \frac{M_1(s)}{M_2(s)}; \quad z_{12}^2(s) = \frac{B_1(s)A_2(s) - A_1(s)B_2(s)}{B_2^2(s)}.$$

В выражении для $z_{12}^2(s)$ необходимо добиться получения квадрата полинома числителя. Для получения точного квадрата в знаменателе дроби (14.1) можно добавить $\pm R$, а затем рассчитать нужное значение R .

Дальнейшая реализация идет по двум параметрам $z_{12}(s)$ и $z(s)$, однако полученный четырехполюсник имеет $z_{12}(s)$ и $z_{22}(s)$, причем $z_{12}(s) = \alpha z_{12}(s)$. В общем случае $z_{22}'(s) \neq \alpha^2 z_{22}(s)$. Разность $\alpha^2 z_{22}(s) - z_{22}(s) = Z_{RC}^+ - Z_{RC}^-$ реализуется в виде двух двухполюсников, включенных последовательно на входе и на выходе КОС; при этом $Z_{\text{н}}$ также уменьшается в α^2 раз.

14.71. Выражение для передаточной функции по напряжению цепи

$$H_U(s) = \frac{U_{\text{внх}}(s)}{U_{\text{вх}}(s)} = \frac{K}{s^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + s [C_2 (R_1 + R_2) + C_1 (1 - K) R_1] + 1} =$$

$$= \frac{K_1}{s^2 + 2\sigma s + \omega_0^2}.$$

Резонансная частота и добротность цепи определяются выражениями

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} = \frac{1}{R_2 C_2 \sqrt{mn}}; \quad Q = \frac{\omega_0}{2\sigma};$$

$$Q = \frac{1}{R_2 C_2 \sqrt{mn}} \cdot \frac{1}{C_2 (R_1 + R_2) / C_1 R_1 + 1 - K} = \frac{1}{m + 1 + mn(1 - K)},$$

Найдем выражения для чувствительностей. Например,

$$S_K^Q = \frac{K}{Q} \frac{dQ}{dK} = KQ \sqrt{\frac{1}{mn}}. \text{ Аналогично } S_m^Q = -\frac{1}{2} + \frac{Q}{\sqrt{mn}};$$

$$S_n^Q = -\frac{1}{2} + Q \frac{1+m}{\sqrt{mn}}; \quad S_K^{\omega_0} = 0; \quad S_m^{\omega_0} = S_n^{\omega_0} = -\frac{1}{2}.$$

Из условия $m=1$ и $-\frac{1}{2} + \frac{Q}{\sqrt{n}} = 0$ получим $n=4Q^2$, причем

$$S_K^Q = K2Q^2; \quad S_n^Q = \frac{1}{2}; \quad S_m^Q = 0 \text{ и } K=1, \text{ так как}$$

$$Q = \frac{\sqrt{n}}{2+n(1-K)} \text{ и } S_m^Q = -\frac{1}{2} + \frac{Q}{\sqrt{n}} = \\ = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2+n(1-K)} \Big|_{K=1} = 0.$$

$$\text{Итак, } S_K^Q = 2Q^2, \quad S_m^Q = S_K^{\omega_0} = 0; \quad S_n^Q = -S_m^{\omega_0} = -S_n^{\omega_0} = \frac{1}{2}.$$

14.72. Принять, как и в задаче 14.71, $m=R_1/R_2$, $n=C_1/C_2$ и вычислить чувствительность при $m=n=1$.

ГЛАВА 15

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

В задачах данной главы численные значения параметров цепей заданы в относительных единицах, поэтому наименования единиц измерения (В, А, Ом, Г, Ф) опущены. Вольт-амперные характеристики нелинейных резистивных элементов во многих задачах представлены графиками, построенными в координатных системах $u(i)$ или $i(u)$.

15.1. В цепи, изображенной на рис. 15.1, а, $u(t) = \sin t$, $R=2$. Найти напряжение на нелинейном резисторе, имеющем вольт-амперную характеристику, показанную на рис. 15.1, б.

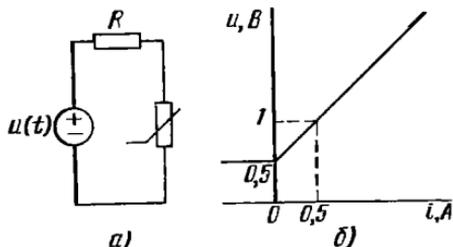


Рис. 15.1

15.2. Вольт-амперные характеристики нелинейных резисторов в цепи (рис. 15.2, а) приведены на рис. 15.2, б. Найти вольт-амперную характеристику цепи относительно выводов 1, 2.

15.3. Вольт-амперная характеристика нелинейного резистора изображена на рис. 15.3. Стрелки показывают, какие участки характеристики соответствуют возрастанию или убыванию тока или

напряжения. Через резистор ρ протекает ток $i(t) = 2 \cos t$ начиная с момента $t=0$. Найти напряжение на резисторе.

15.4. В цепи, изображенной на рис. 15.4, диоды являются идеальными, т. е. их сопротивление в проводящем направлении равно нулю, а в обратном — бесконечности. Токи источников $i_1(t) = 2 + \sin t$, $i_2(t) = 1 + \cos 3t$; найти $i(t)$.

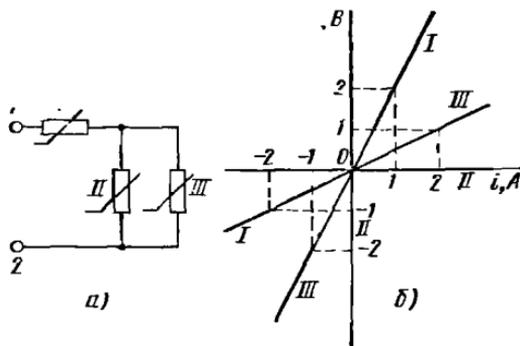


Рис. 15.2

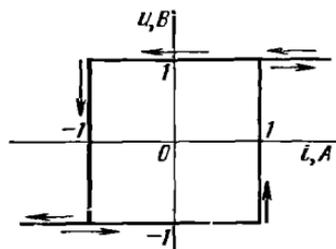


Рис. 15.3

15.5. Вольт-амперная характеристика нелинейного резистора изображена на рис. 15.5. Найти коэффициенты полинома $f(i) = a + bi + ci^2$, аппроксимирующего кривую, изображенную на рис. 15.5, в интервале $0 \leq i \leq 4$. Принять, что $f(i)$ совпадает с аппроксимируемой характеристикой при $i=0$, $i=2$, $i=4$.

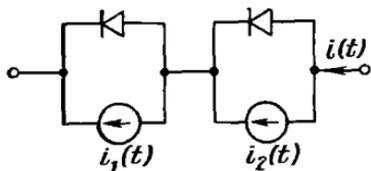


Рис. 15.4

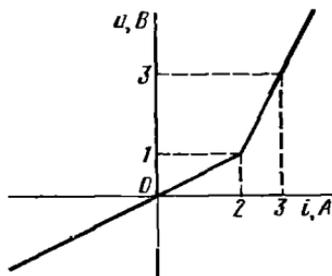


Рис. 15.5

15.6. Решить задачу 15.5 при условии, что аппроксимирующий полином $f(i) = a + bi + ci^2$ определяется по методу наименьших квадратов, т. е. удовлетворяет требованию $\int_0^4 [u(i) - f(i)]^2 di = \min$.

Здесь $u(i)$ — вольт-амперная характеристика, изображенная на рис. 15.5.

15.7. Какой из полиномов $f(i)$, найденных в задачах 15.5 и 15.6, точнее аппроксимирует кривую $u(i)$, изображенную на рис. 15.5, с точки зрения Чебышевского критерия близости, т. е. с точки зрения минимума функции $\Delta = \max |f(i) - u(i)|$, $0 \leq i \leq 4$.

Для определения Δ построить графики полиномов, либо рассчитать их значения в интервале $0 \leq i \leq 4$ в двадцати равноотстоящих точках.

15.8. Вольт-амперная характеристика нелинейного резистора описывается выражением $u=f(i)=2i^3$. Пусть $f_1(i)$ — двухзвенная непрерывная ломаная линия, аппроксимирующая $f(i)$ в интервале $0 \leq i \leq 1$. Оцените графически величину $\delta = \min(\max|f(i)-f_1(i)|)$, $0 \leq i \leq 1$ при условии, что варьируются наклон звеньев ломаной и координаты точки излома.

Предложите способы, позволяющие с помощью ЦВМ найти такую двухзвенную ломаную $f_1(i)$, чтобы величина δ была по возможности меньшей. Опишите соответствующие алгоритмы.

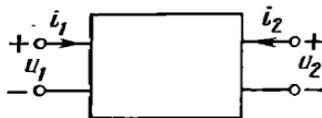


Рис. 15.9

15.9. Нелинейный резистивный четырехполюсник (рис. 15.9) описывается следующими уравнениями:

$$u_1 = 2i_1 + i_1 i_2 + i_1^2 + i_2^2; \quad u_2 = -i_1 + i_2 + 2i_1^2 + 2i_2^2.$$

Полагая, что $u_1=5,2$; $u_2=4,2$, найти точки i_1 и i_2 , решив указанные уравнения итерационным методом Ньютона. В качестве нулевой итерации принять $i_1=i_2=1$. Расчет провести с точностью до четвертого знака.

15.10. Вольт-амперная характеристика нелинейного резистора описывается следующим выражением: $u=f(i)=2i^3$, через резистор протекает ток $i(t)=I_m \sin \omega t$.

Найти гармонику напряжения на резисторе с частотой ω . Определить сопротивление нелинейного резистора по первой гармонике.

Пользуясь этим результатом, найти приближенно первую гармонику тока в цепи, состоящей из последовательного соединения нелинейного резистора, линейного резистора $R=2$ и источника напряжения $u(t)=5 \sin \omega t$. Сравнить результат с точным расчетом, который можно выполнить, если представить результирующую вольт-амперную характеристику цепи графически.

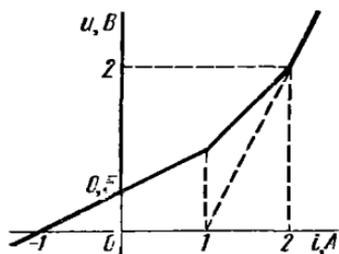


Рис. 15.12

15.11. В цепи рис. 15.1, а входное напряжение $u(t)=|\sin t|$, $R=1$. Какова должна быть вольт-амперная характеристика нелинейного резистора, чтобы напряжение на нем равнялось $0,5 \sin^2 t$? Построить эту характеристику графически.

15.12. Построить резистивный двухполюсник, имеющий вольт-амперную характеристику, изображенную на рис. 15.12. В качестве элементов двухполюсника использовать идеальные диоды, постоянные резисторы и независимые источники.

15.13р. Нелинейный резистивный четырехполюсник, изображенный на рис. 15.9, описывается уравнениями, приведенными в зада-

че 15.9. Полагая, что $i_1(t) = 2 + i_{1\sim}(t)$, $i_2(t) = 1 + i_{2\sim}(t)$, где $i_{1\sim}(t)$ и $i_{2\sim}(t)$ — переменные токи с малыми амплитудами, составить линеаризованные уравнения рассматриваемой цепи по переменному току. Будет ли полученный линейный четырехполюсник обратимым?

15.14. Нелинейный резистивный четырехполюсник, изображенный на рис. 15.9, описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} i_1 &= 2u_1 + 4 + 3u_2 + u_1^2, \\ i_2 &= -5u_1 + 2 + 2u_2 + 4u_2^3. \end{aligned}$$

Построить цепь, описываемую такими уравнениями и содержащую линейные и нелинейные резисторы и источники.

15.15р. В цепи рис. 15.1, a сопротивление линейного резистора является величиной, которую надо определить. Вольт-амперная характеристика нелинейного резистора описывается выражением $u = ai^3$, где a — неизвестная величина. Полагая, что ток $i(t)$ может быть измерен, предложите форму входного сигнала $u(t)$, позволяющего по результатам измерений $i(t)$ найти R и a .

15.16р. Показать, что резистивный двухполюсник, описываемый выражением $u = i - 0,2i^2 + 0,5i^3$, не может генерировать энергию.

15.17. Нелинейный резистивный четырехполюсник, изображенный на рис. 15.9, описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} u_1 &= i_1^3 - 4i_1^2 i_2 + 2i_1 i_2^2, \\ u_2 &= 4i_1^2 i_2 - 4i_1 i_2^2 + i_2^3. \end{aligned}$$

Показать, что суммарная мощность, поступающая в четырехполюсник с обеих пар выводов, не может быть отрицательной.

15.18р. Если нелинейный резистор имеет строго монотонно возрастающую характеристику, то по заданному напряжению ток определяется однозначно. Показать, что эта однозначность сохраняется и для цепи, содержащей произвольное число резисторов со строго монотонно возрастающей характеристикой и произвольное число независимых источников напряжения и тока. При доказательстве воспользоваться условием, что если $f(x)$ — строго монотонно возрастающая функция, то при любых x_1 и x_2

$$[f(x_1) - f(x_2)](x_1 - x_2) > 0, \text{ если } x_1 \neq x_2.$$

15.19. Нелинейный резистивный трехполюсник изображен на рис. 15.19. Полагая, что между любыми парами выводов 1, 2, 3 можно подключать источники напряжения и измерять токи и напряжения на этих выводах, и учитывая, что вывод 4 является недоступным, предложите методику определения вольт-амперных характеристик каждого из трех нелинейных двухполюсников, входящих в цепь.

15.20. Построить двухполюсную цепь, содержащую идеальные вентили, постоянные резисторы и независимые источники и обла-

дающую тем свойством, что ее вольт-амперная характеристика $u=f(i)$ отличается от кривой $u=i^2$ при $0 \leq i \leq 1$ не более, чем на 0,1, т. е. $\max |f(i) - i^2| \leq 0,1$; $0 \leq i \leq 1$.

15.21. В цепи рис. 15.19 в ветвях 1, 4 и 4, 3 включены постоянные резисторы $R_{14}=R_{43}=1$. В ветви 4, 2 включен линейный переменный резистор, сопротивление которого изменяется по закону $R_{42}(t)=2 \sin 3t$. Полагая, что к выводам 1, 2 подключен источник напряжения $u_{12}(t)=5 \cos t$, а к выводам 3, 2 — источник напряжения $u_{32}(t)=3 \sin t$, найти ток в ветви 4, 2.

15.22р. В цепи рис. 15.1, а $R=2$, сопротивление нелинейного резистора является функцией входного напряжения $R_{н}=1+0,3u$. Полагая $u(t)=2 \cos t$, найти ток в цепи.

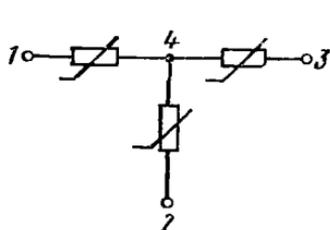


Рис. 15.19

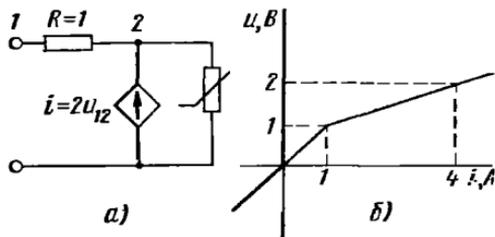


Рис. 15.24

15.23р. Идеальный гиратор с матрицей проводимостей

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

нагружен на нелинейный резистор с вольт-амперной характеристикой $u=f(i)$. Найти зависимость между входным напряжением и током нагруженного гиратора.

15.24. Найти входную вольт-амперную характеристику цепи, изображенной на рис. 15.24, а. Вольт-амперная характеристика нелинейного резистора приведена на рис. 15.24, б.

15.25. К нелинейной индуктивности, имеющей вебер-амперную характеристику $\psi=2i-0,02i^3$, применен импульс напряжения в виде полупериода синусоиды

$$u(t) = \begin{cases} 5 \sin 2t, & 0 \leq t \leq \pi/2 \\ 0 & \pi/2 \leq t. \end{cases}$$

Найти ток через индуктивность, полагая начальные условия нулевыми.

15.26. Решить задачу 15.25 при условии, что $\psi(0)=-2$.

15.27. Кулон-вольтная характеристика нелинейной емкости описывается выражением $q=2u^{1/3}$. Вывести выражение для энергии, накопленной в емкости. Является ли такая емкость пассивным элементом?

15.28. Идеальный гиратор с матрицей проводимостей, приведенной в задаче 15.23, нагружен на нелинейную емкость с кулон-вольт-

ной характеристикой $q = \varphi(u)$. Найти зависимость между выходным напряжением и током гиратора.

15.29р. К цепи, состоящей из параллельного соединения постоянного резистора и нелинейной емкости, приложено напряжение $u(t) = 2 + \sin 3t$. При этом установившееся значение входного тока $i_{вх} = 0,1 + 0,05 \sin 3t + 38,25 \cos 3t + 24 \cos 6t$.

Найти сопротивление резистора и кулон-вольтную характеристику нелинейной емкости.

15.30. Уравнение для тока в цепи имеет следующий вид:

$$2 \frac{d^2 i}{dt^2} + 3 \frac{di}{dt} + 4 - 2i^2 = 3t. \quad \text{Начальные условия } i(0) = 2,$$

$i'(0) = 1$. Представляя приближенно ток $i(t)$ в виде $i(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, найти значения коэффициентов a_0, a_1, a_2 исходя из заданных начальных условий и требований, чтобы в интервале времени $0-1$ правая и левая части уравнения цепи минимально отличались в среднеквадратичном смысле, т. е. если $f(t)$ — левая часть

уравнения, то $\int_0^1 [f(t) - 3t]^2 dt = \min$.

15.31. К цепи, состоящей из последовательного соединения индуктивности $L = 1$, емкости $C = 2$ и нелинейного резистора с вольт-амперной характеристикой $u = i^3$, приложено напряжение $u_{вх}(t) = 2 \sin 3t$.

Найти приближенное значение первой гармоники тока в цепи в установившемся режиме, пользуясь методом гармонического баланса.

15.32. В цепи, изображенной на рис. 15.32, а, $U = 1, C = 1, R = 10$. Вольт-амперная характеристика нелинейного резистора изображе-

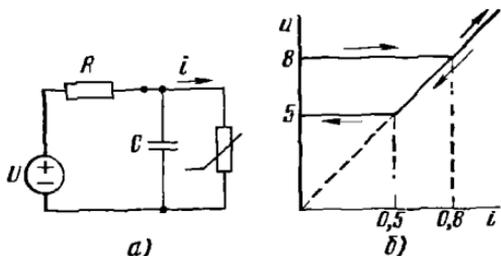


Рис. 15.32

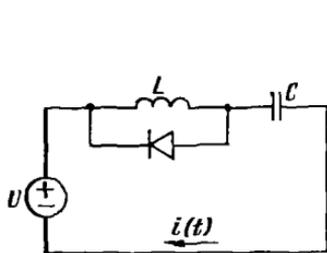


Рис. 15.33

на на рис. 15.32, б. Рассчитать установившийся автоколебательный режим для тока i .

15.33. В цепи, изображенной на рис. 15.33, $U = 1$, вентиль идеальный, начальные условия — нулевые. Найти точное значение тока $i(t)$ в переходном процессе вплоть до установившегося режима.

15.34. В цепи, изображенной на рис. 15.34, а, нелинейный резистор имеет вольт-амперную характеристику, показанную на рис. 15.34, б; $U = 1,5, L = 1, C = 0,1$, начальные условия — нулевые. Най-

ти ток $i(t)$ в интервале $0 \leq t < 6$. Составить алгоритм и программу расчета этой цепи на ЭВМ.

15.35. Цепь состоит из последовательного соединения линейных элементов $L=1$, $C=1$ и нелинейного резистора с вольт-амперной характеристикой $u=-i+i^3$. Пользуясь методом гармонического баланса, определить приближенно амплитуду и частоту тока в периодическом автоколебательном режиме.

15.36. Цепь состоит из последовательного соединения источника напряжения $u(t)=U_m \cos \omega t$, линейного двухполюсника и нелинейного резистора с вольт-амперной характеристикой $u=2i+i^3$. Какое свойство линейного двухполюсника необходимо для того, чтобы установившийся периодический ток в цепи состоял только из одной гармонической составляющей с частотой ω ?

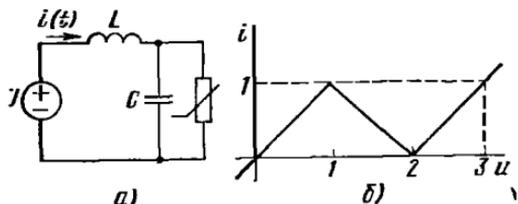


Рис. 15.34

15.37. К цепи, состоящей из последовательного соединения линейной индуктивности $L=1$ и нелинейного резистора с вольт-амперной характеристикой $u=i+0,1i^3$, приложено постоянное напряжение $U=2$. Начальные условия — нулевые. Найти приближенное аналитическое выражение для тока $i(t)$ методом малого параметра. Для этого положить временно, что нелинейный резистор описывается выражением $u=i+\epsilon i^3$, а ток

$$i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} i_k(t) \epsilon^k.$$

Найти первые три слагаемых этого выражения, после чего вновь положить $\epsilon=0,1$. Сравнить полученный результат с численным расчетом в ЭВМ.

15.38. Цепь описывается уравнением

$$2 \frac{dx}{dt} + x + 0,3x^2 = 1; \quad x(0) = 2.$$

Полагая $x = Ae^{-0,5t} + Bte^{-0,5t}$, определить A и B исходя из начальных условий и требований, чтобы правая и левая части уравнения цепи минимально отличались в среднеквадратичном смысле в интервале времени $0 \leq t \leq 2$.

15.39. Электрическая цепь описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^3 - x_1 x_2^2, \\ \dot{x}_2 = x_1(x_1 - 1). \end{cases}$$

Найти все особые точки на фазовой плоскости (x_1, x_2) и определить типы этих точек.

15.40. В цепи, изображенной на рис. 15.40, вольт-амперная характеристика нелинейного резистора описывается уравнением $u = i - 3i^3$, кулон-вольтная характеристика нелинейной емкости — уравнением $q = 2u - u^2$; $L = 1$, $R = 1$. Полагая, что на входе цепи приложено напряжение $u(t) = U_0 + u_{\sim}(t)$, где $u_{\sim}(t)$ — малый переменный сигнал, найти входное сопротивление цепи в режиме малого переменного сигнала при трех значениях: $U_0 = 1$, $U_0 = 2$, $U_0 = 5$.

15.41. Решить задачу 15.40 при условии, что в цепи, изображенной на рис. 15.40, вместо постоянного резистора R включен нелинейный управляемый источник тока $i = i_C^3$, где i_C — ток через нелинейную емкость. Направление тока управляемого источника — от узла 1 к узлу 2.

15.42. Линейный четырехполюсник имеет функцию передачи по напряжению при холостом ходе на выходе $H_u(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$.

К выводам этого четырехполюсника каскадно присоединен нелинейный усилитель с характеристикой $u_{\text{ВЫХ}} = (u_{\text{ВХ}})^3$.

Полагая, что входное сопротивление нелинейного усилителя равно бесконечности, найти функцию передачи по напряжению всей цепи на первой гармонике. Построить амплитудно-фазовые частотные характеристики передаточной функции при различных амплитудах входного синусоидального напряжения. Увеличивая амплитуду входного сигнала, найти, при каком значении амплитуды частотная характеристика начинает охватывать точку с координатами $(-1, 0)$.

15.43. Задана цепь, состоящая из трех параллельно соединенных нелинейных элементов: резистора R , емкости C и индуктивности L ; цепь подключена к источнику тока $i_0 = 2(1 + e^{-t})$. Характеристики элементов: $u_R = 3 \text{ th } i_R$; $q_C = 2u_C^3$; $i_L = \exp \psi_L$. Составить уравнения цепи, приняв в качестве переменных: 1) u_C, i_L ; 2) u_C, ψ_L ; 3) q_C, i_L .

15.44. Составить уравнения состояния цепи, изображенной на рис. 15.44. Данные элементов цепи: $R_1 = 3 \text{ Ом}$, $C_2 = 1 \text{ Ф}$, $L_3 = 2 \text{ Г}$, $u_4 = \text{th } 2i_4$, $i_5 = \psi_5 - 0,2 \psi_5^3$, $u_0 = U = 1 \text{ В}$.

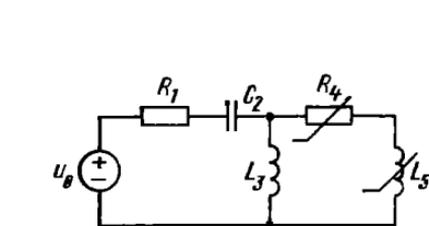


Рис. 15.44

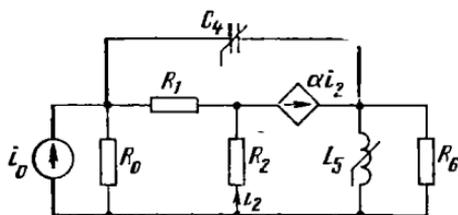


Рис. 15.45

15.45. Записать уравнения состояния цепи (рис. 15.45) с ИТУТ. Данные элементов (Ом, Вб, Кл): $R_0=4$; $R_1=0,2$; $R_2=0,1$;

$$u_4=4q_4^3; \quad i_5=2\varphi^3; \quad R_6=1; \quad \alpha=1; \quad i_0=0,5 \cos t.$$

15.46р. Линейный четырехполюсник с матрицей $[a] = \begin{bmatrix} \frac{2}{s} & 1 \\ s & 1 \\ 1 & s \end{bmatrix}$

нагружен на нелинейный резистор с вольт-амперной характеристикой $u=i^3$. Составить уравнение во временной области, связывающее входные напряжение и ток четырехполюсника при нулевых начальных запасах энергии четырехполюсника.

15.47. Цепь состоит из последовательного соединения линейного двухполюсника с заданной частотной характеристикой $Z(j\omega)$, нелинейного резистора с вольт-амперной характеристикой $u=f(i)$ и источника напряжения $u(t)$; начальные условия — нулевые. Составить интегральное уравнение во временной области для тока цепи $i(t)$.

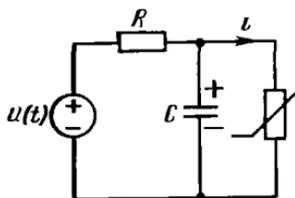


Рис. 15.48

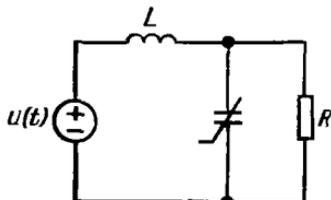


Рис. 15.50

15.48. В цепи рис. 15.48 $u(t)=2 \sin 3t$, $R=1$, $C=1$. Вольт-амперная характеристика нелинейного резистора описывается уравнением $u=3i^3$, начальное напряжение в емкости $u_C(0)=1$; его направление изображено на схеме. Составить нелинейное интегральное уравнение относительно тока i , протекающего через нелинейный резистор. Для этого воспользоваться преобразованием Лапласа и теоремой об эквивалентном генераторе.

15.49. Предложите алгоритм для численного решения на ЦВМ нелинейного интегрального уравнения, полученного в предыдущей задаче.

15.50. Вольт-кулоновая характеристика нелинейной емкости в цепи, изображенной на рис. 15.50, описывается выражением $u=10q+2q^3$; $L=0,1$; $R=4$; $u(t)=10 \cos 2t$. Приняв в качестве переменных ток в индуктивности и заряд емкости, составить уравнения состояния. Решить эти уравнения на основе формулы численного интегрирования Эйлера, приняв шаг расчета $h=0,05$ и рассчитав 300 шагов (решение выводить на печать через 10 шагов). Начальные условия принять нулевыми.

15.51. Решить уравнения, полученные в задаче 15.50, на основе метода Рунге — Кутты 4-го порядка при тех же начальных услови-

ях и с тем же шагом расчета. Сравнить решения, полученные в обоих случаях.

15.52. Решить уравнения, составленные в задаче 15.50, с помощью неявной формулы численного интегрирования — формулы трапеций с тем же шагом $h=0,05$. Сравнить решения, найденные в задачах 15.50—15.52 по затратам машинного времени. Для оценки точности решений, полученных во всех трех задачах, повторить расчет по формуле трапеций при $h=0,01$, полагая, что полученное решение при этом шаге близко к точному (решение выводить на печать через каждые 50 шагов).

15.53. Для цепи рис. 15.50 составить расчетную дискретную схему, заменяя индуктивность и емкость резистивными двухполюсни-

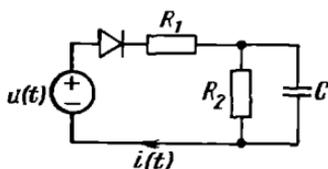


Рис. 15.55

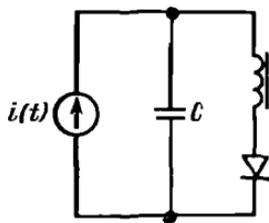


Рис. 15.59а

ками с зависимыми источниками на основе: а) обратной формулы Эйлера; б) формулы трапеций.

15.54. Решить задачу 15.53, полагая, что в схеме, изображенной на рис. 15.50, линейный резистор заменен нелинейным с вольт-амперной характеристикой $u=2i+3i^3$. При составлении дискретной схемы резистор заменить его дискретной моделью.

15.55. В цепи рис. 15.55 диод является идеальным, $u(t)=2\cos 3t$, $R_1=3$, $R_2=5$, $C=1$ — начальные условия — нулевые. Найти ток $i(t)$ за первые три периода приложенного напряжения методом приспособывания. Для решения трансцендентных уравнений, возникающих в процессе расчета, применить метод Ньютона.

15.56. Нелинейная индуктивность, имеющая вебер-амперную характеристику $\psi=3i-2i^3$, включена последовательно с линейным резистором $R=1$ Ом.

Найти величину линейной емкости, которую необходимо включить последовательно с индуктивностью, чтобы в цепи имел место резонанс при частоте приложенного напряжения $\omega=3$ и амплитуде приложенного напряжения $U_{\text{мвх}}=1$.

15.57. В цепи, найденной в задаче 15.56, частота приложенного напряжения $\omega=5$. При какой амплитуде приложенного напряжения в цепи будет иметь место резонанс?

15.58р. Емкость $C=1$, заряженная до напряжения $U=10$, разряжается на цепь, состоящую из последовательного соединения индуктивности $L=1$ и нелинейного резистора с вольт-амперной характеристикой $u=2i+i^3$. Начальный ток в индуктивности равен нулю. Доказать, что ток через резистор не может превышать 10.

15.59р. На рис. 15.59а изображена цепь, в которой $u(t) = 2 \cos t$, $L=2$, кулон-вольтная характеристика нелинейной емкости описывается выражением $q = u - 0,2u^3$. Вентиль, включенный параллельно емкости, является идеальным. Построить дуальную цепь и найти параметры ее элементов.

15.60р. В цепи (рис. 15.60, а) $U=1$, $R_1=30$, $L=1$, $C=1$, $R_2=0,1$. Вольт-амперная характеристика нелинейного резистора изображена на рис. 15.60, б. Показать (качественно), что в зависимости от начальных условий в цепи может быть два различных установившихся режима.

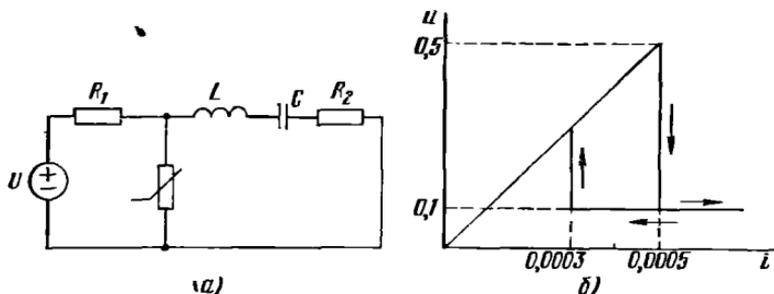


Рис. 15.60

15.61. Рассчитать колебательный установившийся режим в условиях предыдущей задачи через переходный процесс, задавшись нулевыми начальными условиями.

15.62р. К цепи, состоящей из последовательного соединения произвольного R , C -двухполюсника и идеального вентиля, при нулевых начальных условиях подключается источник постоянного напряжения, причем направление источника совпадает с проводящим направлением вентиля. Доказать, что если вентиль закоротить в любой момент времени, то ток в цепи не изменится.

15.63р. Нелинейный резистор имеет заданную вольт-амперную характеристику $u = \varphi(i)$. Требуется построить по возможности простую цепь, содержащую линейные элементы и указанный нелинейный резистор и обладающую тем свойством, что при подключении к цепи источника постоянного напряжения $U=1$ при нулевых начальных условиях через резистор протекает ток, возможно более близкий к заданному току $i(t)$. Предложите точную и строгую формулировку этой задачи, позволяющую разработать алгоритм для ее решения.

15.64. Цепь состоит из последовательного соединения индуктивности $L=1$ и нелинейного резистора с вольт-амперной характеристикой $u = a + bi + ci^2$. К цепи при нулевых начальных условиях подключается источник постоянного напряжения $U=1$. Желательно коэффициенты a , b , c подобрать так, чтобы ток в цепи как можно меньше отличался от выражения $1 - e^{-t} + 0,4 \sin 2\pi t$ при $t \leq 1$. Дайте строгую формулировку поставленной задачи и предложите алгоритмы ее решения.

15.65. К двухполюснику приложено напряжение $u_1(t) = \delta_1(t)$ (единичная ступенчатая функция). Начальные условия — нулевые. Ток через двухполюсник $i(t) = 2e^{-3t} \sin 5t$. Известно, что если к тому же двухполюснику при нулевых начальных условиях приложить при $t \geq 0$ напряжение $u_2(t) = 2t$, то ток через двухполюсник $i_2(t) = -4e^{-3t} \cos 5t$. Показать, что двухполюсник не может быть линейной цепью с постоянными параметрами.

15.66. Один линейный четырехполюсник нагружен на нелинейный резистор с вольт-амперной характеристикой $u_1 = f(i)$, другой — на нелинейный резистор с вольт-амперной характеристикой $u_2 = 2f(i)$. Как должны быть связаны между собой параметры линейных четырехполюсников, чтобы они были эквивалентны друг другу относительно входных выводов?

15.67. Решить предыдущую задачу при условии, что во второй цепи нагрузкой четырехполюсника является резистор с вольт-амперной характеристикой $u = f(3i) + 2i$.

15.68. Решить задачу 15.66 при условии, что во второй цепи нагрузкой четырехполюсника является индуктивность с вебер-амперной характеристикой $\psi = f(i)$.

15.69. Нелинейная емкость имеет кулон-вольтную характеристику $q = f(u)$. Найти цепь, представляющую собой линейный четырехполюсник, нагруженный на нелинейный резистор и обладающую тем свойством, что относительно входных выводов четырехполюсника она эквивалентна нелинейной емкости.

15.70. Дано нелинейное интегральное уравнение относительно неизвестного $x(t)$

$$\int_0^t f(\tau) x(t-\tau) d\tau + \varphi(x) = \psi(t).$$

Построить электрическую цепь, описываемую таким уравнением.

15.71. Дано нелинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + f(x) + x + \frac{df(x)}{dt} = \varphi(t).$$

Построить электрическую цепь, описываемую таким уравнением и содержащую в качестве нелинейного элемента только нелинейный резистор.

15.72. Цепь состоит из последовательного соединения линейного двухполюсника с сопротивлением $Z(s) = 2/(s+1)$ и нелинейного резистора, вольт-амперная характеристика которого изображена на рис. 15.72. К цепи приложено постоянное напряжение $u = 4$. Показать, что цепь имеет три положения равновесия и что положение равновесия, соответствующее падающему участку вольт-амперной характеристики, является неустойчивым.

15.73. Решить задачу 15.72 при условии, что линейный двухполюсник имеет сопротивление $Z(s) = 2,5 + s$. Показать, что цепь будет иметь три положения равновесия, но все они будут устойчивыми.

15.74. Цепь состоит из последовательного соединения индуктивности $L > 0$, линейного резистора $R > 0$ и нелинейного резистора с вольт-амперной характеристикой $u = \varphi(i)$, причем $\varphi(0) = 0$ и $0 \leq \frac{\varphi(i)}{i} \leq K$. Показать, что такая цепь будет абсолютно устойчивой.

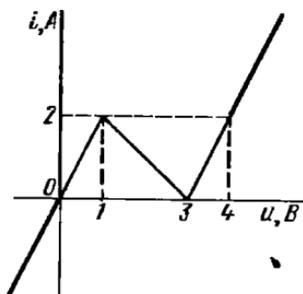


Рис. 15.72

чивой.

15.75р. В цепи, изображенной на рис. 15.75, вольт-амперная ха-

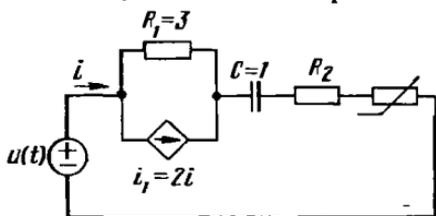


Рис. 15.75

рактеристика нелинейного резистора $i = \varphi(u)$ обладает следующим свойством. При малом $\epsilon > 0$ $0,2 + \epsilon \leq \frac{d\varphi(u)}{du} \leq 1 - \epsilon$. Применяя критерий Цыпкина — Наумова, определить, при каких значениях R_2 гарантируется абсолютная устойчивость установившегося режима в цепи.

РЕШЕНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

15.13. Подставляя в уравнения четырехполюсника значения $i_1(t)$ и $i_2(t)$ и сохраняя только линейные переменные слагаемые, получим:

$$\left. \begin{aligned} u_{1\sim} &= 2i_{1\sim} + i_{1\sim} + 2i_{2\sim} + 4i_{1\sim} + 2i_{2\sim}, \\ u_{2\sim} &= -i_{1\sim} + i_{2\sim} + 8i_{1\sim} + 4i_{2\sim} \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} u_{1\sim} &= 7i_{1\sim} + 4i_{2\sim}, \\ u_{2\sim} &= 7i_{1\sim} + 6i_{2\sim}. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда видно, что матрица сопротивлений

$$[r] = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

несимметрична, следовательно, четырехполюсник необратимый.

15.15. Таких сигналов можно предложить бесконечно много. Один из вариантов — это два постоянных напряжения с различной амплитудой. При постоянном напряжении U_1 получим $U_1 = Ri_1 + ai_1^3$. Аналогично, при постоянном напряжении U_2 получим $U_2 = Ri_2 + ai_2^3$.

Так как токи i_1 и i_2 определены путем измерений, то, решая систему из этих двух уравнений, находим R и a .

15.16. Найдем мощность на двухполюснике

$$p = ui = i^2 - 0,2i^3 + 0,5i^4 = i^2(1 - 0,2i + i^2) = i^2[(i - 0,1)^2 + 0,99].$$

Следовательно, $p \geq 0$, т. е. двухполюсник не может генерировать энергию.

15.18. Предположим, что в рассматриваемой цепи могут быть два различных режима при одних и тех же независимых источниках напряжения и тока. Пусть через k -й нелинейный резистор в первом режиме протекал ток i'_k , а во втором — i''_k . Составим уравнения Кирхгофа цепи для первого режима, затем для второго и вычтем соответствующие уравнения друг из друга. Полученные разностные уравнения описывают цепь, в которой все независимые источники равны нулю, а через ветвь, содержащую k -й нелинейный резистор, протекает ток $i'_k - i''_k$. На этой ветви $U = f_k(i'_k) - f_k(i''_k)$, где $f_k(i_k)$ — вольт-амперная характеристика k -го резистора. Так как по условию

$$[f_k(i'_k) - f_k(i''_k)](i'_k - i''_k) > 0,$$

то в каждой ветви разностной цепи мощность положительна. Но это невозможно, так как цепь не содержит источников. Следовательно, остается принять, что $i'_k = i''_k$, т. е. токи в исходной цепи определяются однозначно.

15.22. Уравнение для тока в цепи $u = 2i + (1 + 0,3u)i$; при $u(t) = 2 \cos t$ $i(t) = \frac{2 \cos t}{3 + 0,6 \cos t}$.

15.23. Согласно матрице проводимостей гиратора его уравнения имеют вид: $i_1 = u_2$; $i_2 = -u_1$. Разрешим уравнение $u = f(i)$ относительно i : $i = \varphi(u)$. Нагрузив гиратор на нелинейный резистор, для нагрузки получим $i_2 = -\varphi(u_2)$ (знак «минус» появился в результате направления токов, принятого для уравнений четырехполюсника через матрицу проводимостей). Следовательно, $-u_1 = i_2 = -\varphi(u_1) = -\varphi(i_1)$. Отсюда $u_1 = \varphi(i_1)$. Таким образом, входная характеристика нагруженного гиратора отличается от характеристики нагрузки тем, что меняются местами наименования координатных осей.

15.29. Так как постоянная составляющая тока протекает только через линейный резистор, то $R = 2/0,1 = 20$. Следовательно, полный ток через R

$$i_R = \frac{2 + \sin 3t}{20} = 0,1 + 0,05 \sin 3t.$$

Поэтому ток через нелинейную емкость

$$i_C = i - i_R = 38,25 \cos 3t + 24 \cos 6t.$$

Находим заряд на емкости, полагая постоянную составляющую заряда равной нулю:

$$q(t) = \int i_C dt = 12,75 \sin 3t + 4 \sin 6t.$$

Сопоставляя в любой момент времени $u(t)$ и $q(t)$, можно построить кулон-вольтную характеристику $q=f(u)$ в интервале $1 \leq u \leq 3$. Условия задачи не позволяют определить кулон-вольтную характеристику при других значениях u .

15.46. Уравнения четырехполюсника в операторной форме имеют вид:

$$U_1(s) = \frac{2}{s} U_2(s) + I_2(s); \quad I_1(s) = U_2(s) + s I_2(s).$$

Выразим $U_2(s)$ и $I_2(s)$ через $U_1(s)$ и $I_1(s)$:

$$U_2(s) = s U_1(s) - I_1(s); \quad I_2(s) = -U_1(s) + \frac{2}{s} I_1(s).$$

Перейдем во временную область:

$$u_2(t) = \frac{du_1(t)}{dt} - i_1(t) + u_1(0) \delta(t); \quad i_2(t) = -u_1(t) + 2 \int_0^t i_1(t) dt.$$

Так как $u_2 = i_2^3$, то

$$\left[2 \int_0^t i_1(t) dt - u_1(t) \right]^3 = \frac{du_1(t)}{dt} - i_1(t) + u_1(0) \delta(t).$$

15.58. Мощность в резисторе $\bar{p} = ui = 2i^2 + i^4 \geq 0$, следовательно, резистор — пассивный элемент и не может генерировать энергию. Поэтому единственным источником энергии, обеспечивающим колебания в цепи, является заряженная емкость. Начальная энергия в емкости $W_C = \frac{Cu^2}{2} = 50$. Следовательно, энергия в индуктивности W_L удовлетворяет условию $W_L = \frac{Li^2}{2} \leq 50$, отсюда $i \leq 10$.

15.59. Элемент, дуальный нелинейной емкости, должен описываться выражением $\psi = i - 0,2i^3$, где ψ — потокосцепление. Это нелинейная индуктивность. Переходя от вентиля к дуальному элементу, надо поменять местами напряжение и ток. Очевидно, что при такой замене идеальный вентиль снова перейдет в идеальный вентиль, только направление вентиля изменится на противоположное. Таким образом, дуальная схема будет иметь такой вид, как показано на рис. 15.59б. При этом $i(t) = 2 \cos t$, $C = 2$.

15.60. Первый режим — это режим постоянного тока, когда ток через цепь L, C, R_2 равен нулю, напряжение на емкости и нелинейном резисторе равно 0,1 В, напряжение на резисторе $R_1 = 1 - 0,1 = 0,9$ В, ток через R_1 и нелинейный резистор $I = 0,9/30 = 0,03$ А.

Второй режим можно получить, если, полагая ток через нелинейный резистор равным нулю, подключить к незаряженной цепи источник напряжения U . Вначале почти весь ток пойдет на заряд емкости, так как сопротивление нелинейного резистора велико. Когда напряжение на двухполюснике L, C, R_2 достигнет значения 0,5, напряжение на нелинейном резисторе скачкообразно

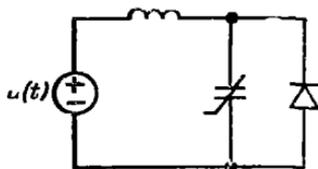


Рис. 15.59б

уменьшится и через него пойдет колебательный ток разряда цепи L, C, R_2 . Когда этот ток уменьшится до значения 0,0003, сопротивление резистора вновь резко возрастет и начнется второй цикл заряда L, C, R_2 -цепи от источника напряжения U и т. д. до установившегося режима. Количественный расчет этого режима выполняют в следующей задаче.

15.62. Покажем, что при подключении постоянного напряжения к R, C -двухполюснику при нулевых начальных условиях ток через двухполюсник не меняет знака. Пусть $Z(s)$ — сопротивление RC -двухполюсника, U — входное напряжение. Изображение тока $I(s) = \frac{U}{sZ(s)} = \frac{\varphi(s)}{s} U$. Функцию $\frac{\varphi(s)}{s}$ для R, C -цепи, как известно из теории цепей, можно представить в виде

$$\frac{\varphi(s)}{s} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{s + \alpha_k}, \quad a_k > 0; \quad \alpha_k \geq 0.$$

Отсюда видно, что оригинал функции содержит только положительные слагаемые.

15.63. Опишем кратко один из возможных подходов к решению задачи. Будем искать цепь в виде последовательного соединения линейного двухполюсника $Z(s)$, заданного нелинейного резистора и источника постоянного напряжения $U=1$. Тогда можно предложить следующий алгоритм решения задачи:

1. По заданному току $i(t)$ и вольт-амперной характеристике нелинейного резистора определяем напряжение на последнем $u(t)$.
2. Находим напряжение на линейном двухполюснике $u_{\pi}(t) = 1 - u(t)$.
3. Находим преобразование Фурье функций $i(t)$ и $u_{\pi}(t)$ — $I(j\omega)$ и $U_{\pi}(j\omega)$.
4. Определяем частотную характеристику сопротивления линейного двухполюсника

$$Z(j\omega) = \frac{U_{\pi}(j\omega)}{I(j\omega)}.$$

5. Представляем $Z(s)$ в виде дробно-рациональной функции $Z(s) = \frac{M(s)}{N(s)}$, где $M(s)$ и $N(s)$ — полиномы заданной степени.

6. С помощью ЭВМ определяем коэффициенты полиномов на основе двух требований: а) удовлетворительного совпадения $Z(j\omega)$ и $\frac{M(j\omega)}{N(j\omega)}$ в полосе частот, соответствующей существенной части спектра $I(j\omega)$; б) $M(s)$ и $N(s)$ должны быть полиномами Гурвица (требование устойчивости).

7. Рассчитываем цепь с найденным $Z(s)$, проверяя, удовлетворяет ли рассчитанный ток выбранному критерию близости к $i(t)$. Если нет, то увеличиваем степени полиномов $M(s)$, $N(s)$ и повторяем расчет.

8. Реализуем $Z(s)$ в виде цепи, содержащей элементы R , L , C и управляемые источники, так как не требовалось, чтобы функция $Z(s)$ была положительной вещественной функцией.

15.75. Найдем сопротивление линейной части цепи. Для этого сначала определяем напряжение на линейной части $U_{л}(s) = -3I(s) + \frac{1}{sC} I(s) + R_2 I(s)$. Отсюда $Z(s) = R_2 - 3 + \frac{1}{sC}$.

Запишем уравнения цепи в стандартной форме, применяемой для исследования абсолютной устойчивости. Обозначим $\sigma = u(t) - u_{л}(t)$; $u_{л}(t) = x$; $i = y$. Тогда получим $x = Z(p)y$; $y = \varphi(\sigma)$; $p = d/dt$.

Критерий Цыпкина — Наумова, примененный к такой форме записи уравнений, требует, чтобы для абсолютной устойчивости выполнялись два условия:

1. Функция $\frac{Z(p)}{1 + 0,2Z(p)}$ должна иметь все полюса в левой полуплоскости.

$$2. \operatorname{Re} \frac{Z(j\omega)}{1 + 0,2Z(j\omega)} + \frac{1}{1 - 0,2} \geq 0.$$

Первое условие после подстановки выражения для $Z(p)$ выполняется при любом $R_2 \geq 0$. Проверим второе условие:

$$\operatorname{Re} \frac{Z(j\omega)}{1 + 0,2Z(j\omega)} = \frac{1 + (R_2 - 3)(R_2 + 2)\omega^2}{0,2(R_2 + 2)^2\omega^2 + 0,2}.$$

Отсюда легко найти, что второе условие будет выполнено, если $R_2 \geq 2$.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Матханов П. Н. Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи. — М., 1972.
2. Матханов П. Н. Основы синтеза линейных электрических цепей. — М., 1976.
3. Матханов П. Н. Основы анализа электрических цепей. Нелинейные цепи. — М., 1977.
4. Белецкий А. Ф. Основы теории линейных электрических цепей. — М., 1967.
5. Дезоер Ч. А., Ку Э. С. Основы теории цепей. — М., 1976.
6. Зернов Н. В., Карпов В. Г. Теория радиотехнических цепей. — М., 1972.
7. Ионкин П. А., Даревский А. И., Кухаркин Е. С. Теоретические основы электротехники. Ч. 1. — М., 1976.
8. Бессонов Л. А. Сборник задач по теоретическим основам электротехники. — М., 1975.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Сборник задач по расчету электрических цепей/Под ред. Куренева С. И. и Пинеса М. И. — М., 1967.
2. Mitra S. K. Analysis and Synthesis of Linear Active Networks. — J. Wiley, 1969.
3. Newcomb R. W. Active Integrated circuit Synthesis, Englewood, N. Y., Prentice — Hall, 1968.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

В приведенных далее ответах были использованы следующие приемы записи математических выражений.

1. Для записи дробных выражений используется косая черта, например, дробь $\frac{6s+1}{s^2+4s+0,5}$ записана в виде $(6s+1)/(s^2+4s+0,5)$.

2. Показательные функции записаны с использованием обозначения \exp , т. е. $Ae^{-a(t-\tau)}$ записана в виде $A \exp[-a(t-\tau)]$.

3. Матрицы даны в виде множеств, элементов которых являются элементы первого столбца матрицы, затем второго и т. д. В указываемом при этом порядке матрицы первый индекс характеризует число строк, второй — число столбцов. Для одностробцовых матриц (векторов) порядок матрицы не указан.

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ записана в виде

$$[a]_{23} = \{a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}\}; \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \Rightarrow [a] = \{a_1, a_2, a_3\}.$$

Глава 1

1.1. $i = -2\pi \sin \pi t$; при $t = t_1 = 0,5\text{с}$ $i < 0$, т. е. действительное направление тока противоположно указанному на схеме; отрицательные заряды перемещаются от вывода 1 к выводу 2. 1.2. Знак «+» приписать выводу 1. Так как $R > 0$, то при $t = t_1$ $u = Ri > 0$, следовательно, потенциал вывода 2 будет выше потенциала вывода 1. 1.4. Для резистивного элемента мощность $P = Ri^2 > 0$, откуда $i = \pm \sqrt{P/R}$. Заданной функции $p(t)$ можно сопоставить множество законов изменения тока, отличающихся знаками тока на различных участках. 1.5. а) $I = 0,25\text{ А}$; $P_{\text{и}} = -12,5\text{ Вт}$; б) $I = 1\text{ А}$; $P_{\text{и}} = -50\text{ Вт}$. 1.6. а) $U = 40\text{ В}$; $P_{\text{и}} = -40\text{ мВт}$; б) $U = 7,5\text{ В}$; $P_{\text{и}} = -7,5\text{ мВт}$. 1.7. $P_{\text{иН}} = 100\text{ Вт} > 0$, ИН — потребляет энергию; $P_{\text{иТ}} = -100\text{ Вт}$, ИТ — отдает энергию. При включении R $P_{\text{иН}} = 100\text{ Вт}$; $P_{\text{иТ}} = -120\text{ Вт}$. 1.9. $P_I = -208\text{ Вт}$, $P_U = 80\text{ Вт}$, $P_R = 128\text{ Вт}$ или $P_I = -48\text{ Вт}$, $P_U = -80\text{ Вт}$, $P_R = 128\text{ Вт}$. 1.11. $i_3 = -1,59\text{ А}$; $i_3 = i_1 - i_2$. 1.12. Уравнение (1.11) справедливо для цепи рис. 1.12. 1.13. $U_{14} = 3\text{ В}$; $U_{21} = -11\text{ В}$; $U_{23} = -10\text{ В}$. 1.16. $\Psi = 1,9\text{ Вб}$; $u_L = 0,1\text{ В}$; $W = 0,9\text{ Дж}$.

Глава 2

2.1. $R_a = 6,65\text{ Ом}$, $R_b = 5\text{ Ом}$, $R_b/R_a = 3,36$. 2.2. $R_{12} = 0,634\text{ Ом}$; $R_{24} = 0,545\text{ Ом}$; $R_{23} = 0,728\text{ Ом}$; $R_{13} = 1,180\text{ Ом}$. 2.3. $R_{\text{вх}} = 8\text{ Ом}$. 2.6. $R_{\text{вх}} = 25\text{ Ом}$; $H_U = 0,12$. 2.7. 1) $R_{\text{ав}} = 2R[\pi\varphi - \varphi^2]\pi^2$. 2.10. $R_a = 16,3\text{ Ом}$. 2.11. $R_b \approx 0,612\text{ R}$. 2.13. $\{R_1, G_2, R_3, G_4, \dots\} = \{1, 1, 2, 1, \dots\}$ и $\{2, 4, 4, \dots\}$. 2.17. $H_U = 0,4$. 2.20. $R_1 = R_0(H_U + 1)/H_U$; $R_2 = R_0 H_U(1 + H_U)$; для $H_U = 0,18$; $R_1 = 6,55 R_0$; $R_2 = 0,152 R_0$. 2.23. 1) $U_{R3} = 9\text{ В}$; 2) $U_2 = -24\text{ В}$. 2.24. $R_4 = 0,2\text{ Ом}$; $P_{\text{max}} = 5,76\text{ Вт}$. 2.25. $I_3 = 4\text{ А}$. 2.27. $U_{R4} = 2,25\text{ В}$. 2.29. $R_0 = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) = 1 / (G_1 + G_2)$; $U_0 = U_3 + (G_1 U_2 + I_2) / (G_1 + G_2)$. 2.30. $R_0 = 1 / (G_1 + G_2 + G_3)$; $U_0 = [U_1 G_1 + U_2 (G_1 + G_2) + U_3 (G_1 + G_2 + G_3)] / (G_1 + G_2 + G_3)$.

Глава 3

3.8. $i_1 - i_4 - i_5 = 0$; $i_2 + i_4 + i_5 - i_6 = 0$; $i_3 + i_5 - i_6 = 0$. 3.9. $-u_1 - u_2 - u_3 + u_5 = 0$; $u_2 + u_3 + u_6 = 0$; $-u_2 - u_3 - u_4 + u_7 = 0$; $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_6 = 0$; $u_3 + u_4 + u_9 = 0$. 3.13. $i_{31} = 3,5\text{ А}$; $i_{12} = -0,5\text{ А}$; $i_{23} = 1\text{ А}$. 3.15. $0,5\text{ А}$. 3.20. $i_1 = -2,5\text{ А}$; $i_3 = -1,5\text{ А}$; $i_6 = 4\text{ А}$. 3.26. $I_1 = -9\text{ А}$; $I_6 = 7\text{ А}$; $U_3 = 0$; $U_4 = 6\text{ В}$. 3.33. $H_U = 1/8$. 3.34. $H_I = 1/6$. 3.35. $i_2 = -1\text{ А}$. 3.36. $i_2 = 4\text{ А}$.

- 4.1. 50 Ом ; $i_L = 4 \exp(-120t)$. 4.2. Включить последовательно $R_1 = 3 \text{ Ом}$.
 4.4. $u_C = 2 - 0,8 \exp(-2t)$; $i_L = 0,4 \exp(-2t)$. 4.7. $u_C = 8 - 2 \exp(-t)$; $i_L = 3 \exp(-2t)$. 4.11. $i_L = 2 + \exp(-3t)$. 4.12. $u = 6 + 1,2 \exp(-2t)$.
 4.13. 2 Ом . 4.14. $i_L = 6 + 3 \exp(-2t)$; $u_1(0+) = 15 \text{ В}$. 4.17. $i_C = 1,5 \exp(-t)$.
 4.18. $u_C = 3 - \exp(-t)$. 4.19. $di_1/dt = -0,5 i_1 + 2$. 4.20. 1) $u_C = 10 - 15 \exp(-t) + 5 \exp(-3t)$; 2) $i_L = -11,11 \exp(-t) \sin 3t$. 4.21. $i_L = \exp(-t)(2-t)$. 4.22. $u_C = 6,52 \exp(-0,5t) \sin(0,5t - 76^\circ 10')$. 4.24. $i_L = 4 \exp(-2t)(t+1)$. 4.25. б) $-0,5 \pm j 1,323$; в) $-2 \pm \sqrt{2}$; г) $-1 - j$;
 е) $-0,25 \pm j 1,409$. 4.27. $i_L = 5 + 5\sqrt{2} \exp(-t) \sin(t + 45^\circ)$. 4.28. $u_{C2} = 4 - [2/3] \times [2 \exp(-t) - \exp(-4t)]$. 4.29. $u_C = -2 - \exp(-2t) + 3 \exp(-6t)$. 4.30. $0,2 \text{ Ом}$. 4.31. $i_L = 1 - 2,69 \exp(-t) + 1,89 \exp(-3t)$; $u_C = 15 - 9,868 \exp(-t) + 1,868 \exp(-3t)$. 4.32. $i_L = 6 - 3,275 \exp(-2t) \times \sin(t + 66,37^\circ)$; $u_C = 2,343 \exp(-2t) \sin(t + 39,8^\circ)$. 4.34. $[x] = \{di_{L1}/dt; di_{L2}/dt; du_C/dt\}$; $[A]_{33} = \{-R_1/L_1; 0; 1/C; 0; -R_2/L_2; -1/C; -1/L_1; 1/L_2; 0\}$; $u_C = 2 + 2,286 \exp(-1,5t) - 4,536 \exp(-0,5t) \sin(0,867t + 109,11^\circ)$. 4.35. $u_{C1} = 5 \exp(-t) + 5,016 \exp(-1,5t) \cos(6,905t - 4,534^\circ)$. 4.36. $[x] = \{di_{L1}/dt; di_{L2}/dt; du_C/dt\}$; $[A]_{33} = \{-0,75; 0,25; 1; 0,25; -0,75; -1; -1; 1; 0\}$; $p_1 = -0,5$; $p_{2,3} = -0,5 \pm j 1,323$. 4.40. $i = 1 + 0,5 \exp(-3t)$. 4.41. $u_C = 6 - 4 \exp(-t)$. 4.42. $u_{C1} = 4 + 2 \exp(-0,5t)$. 4.43. $[x] = \{di_{L1}/dt; di_{L2}/dt; di_{L3}/dt\}$; $[A]_{33} = \{-1; 0; -1; 0; -1; 1; -1; 1; -2\}$; $p_1 = 0$; $p_2 = -1$, $p_3 = -3$. 4.44. $du_{C1}/dt = -2 u_{C1} - u_{C2} + [2u(t) - 2u_1(t)] - (2/3)(du_1/dt)$; $du_{C2}/dt = -u_{C1} - 2u_{C2} + [u(t) - u_1(t)] + (2,3)(du_1/dt)$. 4.45. 1) $u_{C1} = -3 - 0,75 \exp(-t) - 0,75 \exp(-3t)$; 2) $u_{C1} = -3 + 0,5 \exp(-t) + 1,5 \exp(-3t)$. 4.46. $R = R_1 = 2 \text{ Ом}$, $R_2 = 4 \text{ Ом}$, $C = 3/8 \text{ Ф}$. 4.47. $R = 2 \text{ Ом}$, $L = 0,7213 \text{ Г}$. 4.49. 1-й, 2-й и 4-й. 4.51. а) $n = 2$; б) $n = 4$; в) $n = 5$; г) $n = 3$. 4.52. Пропорциональность между $i(t)$ и U имеет место только при $u_C(0) = 0$. 4.53. R — любое значение (конечное, не равное нулю), $C = 2 \text{ Ф}$. 4.54. Энергии равны; это соотношение не зависит от C или R . 4.55. $Q \approx 5$. 4.56. а) Последовательный RLC -контур; $\delta = \frac{R}{2L}$, $\omega_C = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$. б) Цепь 1,2,1; 2,1,2; 3,1,2, где ветви: 1 — последовательно источник напряжения и C — элемент; 2 — R -элемент; 3 — L -элемент. Элементы R , L и C можно переставлять по круговой схеме — всего может быть 3 комбинации; $\delta = \frac{1}{2RC}$, $\omega_C = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2}$. 4.57. б) $i_L(t) = 4 + \exp(-2t) - 3 \exp(-6t)$; в) $i_L(t) = 8 [\exp(-2t) - \exp(-6t)]$.

- 5.2. а) $4 \exp(-t) \delta_1(t) - 4 \exp[-(t-1)] \delta_1(t-1)$. 5.4. $(a/R)t + (aL/R^2) [\exp((-R/L)t) - 1]$; $ac [1 - \exp(-t/RC)]$. 5.5. RL -цепь: $2 \exp(-2t) - 2 \exp(-4t)$. 5.6. $4 \exp(-2t) \delta_1(t) + 4 \exp[-2(t-0,5)] \delta_1(t-0,5) - 8 \exp[-2(t-1)] \delta_1(t-1)$. 5.9. $h(t) = (1/16) \exp(-0,5t) \delta_1(t) + (1/8) \delta(t)$; $u_{R3} = 0,2 \exp(-3t) + 0,05 \exp(-0,5t)$. 5.11. $2 \exp(-2t) + 0,5t \exp(-2t)$. 5.12. $0,75 \exp(-2t) - 0,5 \exp(-4t)$. 5.14. При $R_B = 4 \text{ Ом}$ $h_1(t) = 0,25 \exp(-2t) \sin 4t$. 5.15. $t_n = 2k\pi \sqrt{LC}$; $k = 1, 2, 3, \dots$. 5.16. $f_2(t) = [-8 + 6t + 9 \exp(-t) - \exp(-3t)] \delta_1(t)$. 5.17. б) $L = 0,5 \text{ Гн}$; в) $C = 2 \text{ Ф}$; г) последовательно $R = 0,25 \text{ Ом}$, $L = 0,25 \text{ Г}$; а) последовательно $R = 0,5 \text{ Ом}$, $C = 4 \text{ Ф}$. 5.18. На рис. 5.18, б последовательно два R -элемента и C -элемент; на рис. 5.18, в два R -элемента, параллельно соединенные, и последовательно с C -элементом. 5.19. Реализация характеристики возможна последовательным RL -контуром. 5.20. $R = 0,5 \text{ Ом}$; $C = 0,5 \text{ Ф}$; $L = 0,046 \text{ Г}$.

- 6.2. $u = 19 \cos(314t - 11^\circ)$. 6.6. $|Z| = 20 \sqrt{2}$ Ом, $\varphi = 45^\circ$. 6.7. $g = 0,06$ См; $b = 0,08$ Св. 6.8. $Z = 1 + j$. 6.9. $Z = j$. 6.10. $U_{12} = 28,2$ В; $U_{23} = 40$ В; $U_{24} = 30$ В; $U_{14} = 22,3$ В; $U = 31,6$ В. 6.11. $I_1 = 4$ А; $I_2 = 2,82$ А. $I_0 = 3,61$ А. 6.12. а) Напряжение увеличится в 1,58 раза. б) Ток уменьшится в 1,27 раза. 6.13. Возможны два ответа: $U_C = 20$ В и 100 В. 6.14. $i = 13,2 \times \sqrt{2} \cos(1000t - 52^\circ 40')$; $u = 17 \sqrt{2} \cos(1000t + 28^\circ)$; $P = 36$ Вт; $Q = 221,5$ вар; $S = 224,4$ В·А. 6.15. $I_1 = 3,09$ А; $I_2 = 3,09$ А; $I_3 = 5,53$ А; $P = 30,7$ Вт, $Q = 3,8$ вар; $S = 31$ В·А. 6.16. $U = 13$ В; $I_{Z4} = 3,58$ А. 6.17. $Y_{51} = -j 0,25$; $I_1 = 2$ А; $I_5 = 1,41$ А; $i_1 = 2 \sqrt{2} \cos(\omega t + 75^\circ)$; $i_5 = 2 \cos \times (\omega t - 60^\circ)$. 6.18. $R_2 = 6$ Ом. 6.19. $X_L = X_C$; для дуальной цепи $B_C = B_L$. 6.20. $X_C = 3$ Ом; $P = 37,5$ Вт. 6.24. $R = 12,5$ Ом; $X_L = 16,6$ Ом. 6.25. $R = 3,2$ Ом; $X_L = 2,4$ Ом; $X_C = 6,6$ Ом. 6.26. $X_1 = 10$ Ом; $X_2 = 5$ Ом; $R_2 = 8,67$ Ом. 6.27. Последовательный контур: а) $L = 0,25$ мГ; $R = 15,8$ Ом; б) $L = 159,2$ мкГ; $C = 159,2$ пФ; $R = 8$ Ом. Параллельный контур: а) $L = 0,25$ мГ; $R = 158,1$ кОм; б) $L = 159,2$ мкГ; $C = 159,2$ пФ; $R = 125$ кОм. 6.28. $C = 2500 \div 100$ пФ; $Q = 3,163 \div 15,81$; $\Delta f_0 = 316,2$ кГц. 6.29. Токи в А: $I_1 = 5 \sqrt{2}$; $I_2 = 5$; $I_3 = 10 \sqrt{2}$; $Y_{31} = 1 - j 0,5$; $Y_{32} = -0,5 - j$. 6.30. Токи в А: $I_1 = 6,9$; $I_2 = 10,5$; $I_3 = 9,96$; $I_4 = 2,3$; $I_5 = 5,16$. 6.32. Токи в А: $I_1 = 2,36$; $I_2 = 2,2$; $I_3 = 1,2$; $I_4 = 1,6$; $I_5 = 1,6$. 6.34. $I_3 = 0,9$ А. 6.35. $I_2 = 1$ А. 6.37. 1) $u_C = 10 \exp(-2t)$; 2) $u_C = 0,5e^{-t} \cos(10t - 144^\circ)$. 6.38. $I_\Phi = I_n = 5$ А; $P = 750$ Вт. 6.39. 1) $I_A = I_C = 8,65$ А; $I_B = 15$ А; $P = 1500$ Вт; 2) $I_A = I_C = 4,325$ А; $I_B = 0$; $P = 375$ Вт. 6.41. 1. При включенном нейтральном проводе $I_A = I_B = 10$ А; $I_C = 0$; $I_0 = 10$ А; без нейтрали $I_A = I_B = 10 \sqrt{3}$ А. 2. $I_A = I_B = I_C = 10 \sqrt{3}$ А. 6.42. $Z_a = 10 \exp(-j30^\circ)$. 6.43. $I_{ab} = I_{bc} = I_{ca} = 5$ А; $I_A = I_B = I_C = 5 \sqrt{3}$ А; $P = 1298$ Вт. 6.44. 1) $I_{ab} = I_{ca} = 5$ А; $I_{bc} = 0$; $I_A = 5 \sqrt{3}$ А; $I_B = I_C = 5$ А; $P = 865$ Вт; 2) $I_{ab} = I_{ca} = 2,5$ А; $I_{bc} = 5$ А; $I_A = 0$; $I_B = I_C = 7,5$ А. 6.45. $I_{ab} = I_{bc} = I_{ca} = 10$ А; $I_4 = I_B = 20$ А; $I_C = 0$; $P = 2000$ Вт. 6.46. 1) $I_{ab} = I_{ca} = 10$ А; $I_{bc} = 0$; $I_A = 20$ А; $I_B = I_C = 10$ А; $P = 1500$ Вт; 2) $I_{bc} = 10$ А; $I_{ab} = I_{ca} = 5,76$ А; $I_A = 0$; $I_B = I_C = 15,28$ А; $P = 1485$ Вт. 6.47. $U = 8 \sqrt{5}$ В; $L = \frac{1}{15}$ Г; $C = 2500$ мкФ. 6.48. $I_1 = 15,63$ А; $I_2 = 12,5$ А; $I_3 = 6,25$ А. 6.49. а) $z_{вх} = \infty$; б) $z_{вх} = 10$ Ом. 6.50. Токи в А: $I_1 = 10$; $I_2 = I_6 = I_7 = 2$; $I_3 = 8$; $I_4 = I_5 = 4$.

Глава 7

- 7.1. $Y_{11}(s) = (3s^2 + 4s + 1)/(s^2 + 3s + 1)$; $Y_{21}(s) = s^2/(s^2 + 3s + 1)$; $Z_{11}(s) = 1/Y_{11}(s)$; $Z_{21}(s) = s^2(3s^2 + 4s + 1)$. 7.2. $Z_{вх}(s) = s(0,75s^2 + 0,75s + 1)/(0,75s^3 + s^2 + s + 1)$. 7.4. $R = 3$ Ом; $L = 0,4$ Г; $C = 0,059$ Ф. 7.5. Для схемы рис. 7.5, б $|Y_{вх}(j\omega)| = \sqrt{(\omega^4 - \omega^2 + 1)/(4\omega^4 - 7\omega^2 + 4)}$; $|Y_{вх}(0)| = |Y_{вх}(\infty)| = 0,5$. При $\omega = 1/\sqrt{LC} = 1$ резонанс: $|Y_{вх}(j1)| = 1$; $\Psi(\omega) = \arctg[\omega/(1 - \omega^2)] - \arctg[\omega/(2 - 2\omega^2)]$. 7.6. $Z_{вх}(s) = (s^2 + 5s)/(s^2 + 5s + 5)$. 7.10. а) $H(s) = (s^2 + 1/LC)/(s^2 + s/RC + 1/LC)$; б) $H(s) = [1/LC](s^2 + s/RC + 1/LC)$. 7.13. $i_{L1} = 4 \cos(2t - 36^\circ 50') - 2 \exp(-2,667t)$; $i_{L2} = 1,2 \exp(-0,8t)$. 7.15. Для цепи с $L: i = 5\sqrt{5} \cos(2t - 45^\circ) - 1,58 \exp(-2t)$; для цепи с $C: i = 5\sqrt{5} \cos(2t + 45^\circ) + 4,743 \exp(-2t)$. 7.16. Цепь с $C: u = 11,18 \times \cos(2t - 18^\circ 30') - 3,53 \exp(-2t)$; цепь с $L: u = 11,18 \cos(2t + 71^\circ 30') + 4,95 \times \exp(-2t)$. 7.18. 1) $u = 3,604 \exp(-t) \cos(0,5t + 78,69^\circ) + 1,414 \exp(-t)$; 2) $u = 4 \cos(2t + 45^\circ) + 0,566 \exp(-t)$; 3) $u = 4 \exp(-2t) - \exp(-t)$. 7.19. 1) $i_C = 1,25 \sqrt{2} \cos(2t + 45^\circ) + 1,25 \exp(-2t)$; 2) $i_C = -3 \exp(-t) + 6 \exp(-2t)$.

Глава 8

8.1. $R = 5 \text{ Ом}; L = 0,078 \text{ Г}; |M| = 0,0637 \text{ Г}; I_{1к} = 8,3 \text{ А}$. 8.2. $[Γ] = \{8 \text{ 3 } 1/3; 1/3; 1 \text{ 6}\}$. 8.3. Параллельное соединение $L_c = 6/13 \text{ Г}; L_b = 2/7 \text{ Г}$. 8.5. 3. $U_1 = 125,6 \text{ В}; U_2 = 314 \text{ В}$ — при $M > 0$; $U_1 = 0$; $U_2 = 188,4 \text{ В}$ — при $M < 0$. 8.6: 3. $I_1 = 3,19 \text{ А}; I_2 = 0$ — при $M > 0$. 8.8. 8.32 В. 8.9. $I_{13}/I_{1p} = 4$ при согласном включении; $4/3$ — при встречном; 8.10. $\omega [Z] = [Z]$, где $\omega = 314 \text{ рад/с}$; $[L] = \{2; -1; 0,5; -1; 4; -2; 0,5; -2; 8\}$. 8.11. $[Γ] = a' \{11; -5; 2; -5; 10; -4; 2; -4; 5\}$; $a = 1/17$. 8.12. а) 16 Г ; в) $1,417 \text{ Г}$. 8.14. $I_1 = 5,1 \text{ А}; I_2 = 5,83 \text{ А}$. 8.19. 2 Вт. 8.20. $I_{R1} = 3$; $I_1 = -3 - j6$; $I_2 = 6 + j3$. 8.22. $[x] = \{-\{du_C/dt; di_{L1}/dt; di_{L2}/dt\}; [A]_{33} = \{-1/4; 1/2; -1/2; -3/4; -1/2; -1/2; 3/4; -1/2; -1/2\}$. 8.23. $M = L - 2\omega^2 C$. 8.24. $\omega_{1p} = 1/\sqrt{2C(L + |M|)}$; $\omega_{2p} = 1/\sqrt{L/C(L^2 - M^2)}$. 8.25. $\omega_p = 2 \text{ рад/с}$. 8.26. $[Z]_{33} = \{1 + j 1,5; j 1,5; 1; j 1,5; 2 + j 2,5; 2 + j 2; 1; 2 + j 2; 8 + j 5\}$. 8.31. $[x] = \{du_{C1}/dt; du_{C2}/dt\}$; $[A]_{22} = \{-1/C_1\} [G_1 + G_3 + G_2(1 - \alpha)]$; $(1/C_2) G_2 [(G_3/G_2) - \alpha]$; $G_3/C_1; -G_3/C_2$. 8.33. $[x] = \{du_{C1}/dt; du_{C2}/dt\}$; $[A]_{22} = \{-1/C_1\} [(r_{22}D) + G_1]$; $-1/C_2\} [(r_{22} - r_{11})D + G_1]$; $-1/C_1\} [(r_{22} - r_{21})D + G_1]$; $-1/C_2\} [(r_{11} + r_{22} - r_{12} - r_{21})D + G_1]$; где $D = r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21}$. 8.36. $1 [1 + (G_2/G_1)(1 - \alpha)^2]$. 8.37. $Y_1\alpha_1\alpha_2 Y_3 \times \times \{1 - \alpha_2\} [1 - (1 - \alpha_1)Y_1/Y_0]$. 8.38. $R_1(1 + m)/m$, где $m = G_3(1 - \alpha)^2 G_1 [1 + (G_3 G_2)(1 - \alpha)]$. 8.39. $K_U = 3$; $C_3 = \sqrt{2} \text{ Ф}$; $C_4 = 0,5 \sqrt{2} \text{ Ф}$. 8.46. а) $-R_2/R_1$; б) $(R_1 + R_2)/R_1$.

Глава 9

9.1. 1. $5s^2 - 10/s$; 4. $(0,736/(s + 5)) \exp(-0,2s)$. 9.2. б) $(4's) [1 - \exp(-2s)] \exp(-s)$; д) для периодического сигнала $2 [1 - \exp(-2s)(1 + 2s)] s^2 [1 - \exp(2s)]$. 9.3. 1. $2 + \exp(-2t)$; 2. $2 + t \exp(-t)$; 4. $2 - 2 \exp(-t) \cos t$; 7. $2\delta(t) + 2 \exp(-t) - \exp(-2t)$. 9.4. $1f(0+) = 3$; $f(\infty) = 4$; $f'(0+) = -2$; 5. $f(0+) = 1$, $f(\infty)$ — не существует, $f'(0+) = 3$. 9.5. 1. $2(t-2)\delta_1(t-2)$; 3. $2 \exp[-4(t-2)](t-2)\delta_1(t-2)$; 5. $10[\delta_1(t) - \delta_1(t-6,28)] \cos 10t$. 9.10. $i_C = -5t \exp(-5t)$. 9.17. $i_{L2} = 4 \cos(2t - 53,13^\circ) - 0,4 \exp(-4t)$; $u_C = 4,69 4 \exp(-t) \cos(\sqrt{3}t + 162,3^\circ)$. 9.19. $u_{C1} = 2 \exp(-3t) + 2 \exp(-t)$; $i_{C1} = 4\delta(t) - 6 \exp(-3t) - 2 \exp(-t)$. 9.22. $i_{L1} = -3,6 \exp(-2t) + 0,6 \exp(-t/3) + 3 \exp(-t)$; $i_{L2} = -2,4 \exp(-2t) - 0,6 \exp(-t/3) + 3 \exp(-t)$. 9.21. $i_{L2} = -2 \exp(-t) - 2 \exp(-3t)$. 9.26. $H_I(s) = 16/3(s^2 + 4s + 8)$; $i_L = i_{L1}(t)\delta_1(t) - i_{L1}(t-3)\delta_1(t-3)$, где $i_{L1}(t) = 2 + 2\sqrt{2} \exp(-2t) \cos(2t + 135^\circ)$. 9.27. $H_I(s) = 0,5 s^2/(s^2 + 4s + 8)$; $h(t) = 0,5 \delta(t) - 2 \exp(-2t) \cos 2t \delta_1(t)$. 9.30. При $R_G = 150 \text{ Ом}$, $\omega_G = 1/\sqrt{LC} = 10^6 \text{ рад/с}$, $H_{U*}(s_*) = (s_*^2 + 1)/12(s_*^3 + 2s_*^2 + 2s_* + 0,5)$. 9.32. $u_{L1}(t) = -0,11 \exp(-2,84t) + 2,57 \exp(-0,6t) \times \times \cos(0,6t - 35^\circ)$. 9.34. $i_{L1} = 2 - \exp(-2t) + \exp(-6t)$; $i_{L2} = 4 - 2 \exp(-2t)$. 9.36. $i_{L1} = -0,56 + 3,2 \exp(-13t) - 0,64 \exp(-3t)$. 9.39. Цепь будет неустойчивой при $C_4 > \sqrt{2} \text{ Ф}$; при $K_U > 5$. 9.40. $Z(s) = 1,25(s^2 + 4s + 8)(s^3 + 4s^2 + 14s + 20)$. 9.41. $h(t) = \delta(t) - [0,5 \exp(-t) - 1,5 \exp(-3t)] \delta_1(t)$. 9.42. $i_B(t) = 0,49 \cos(2t - 76^\circ)$. 9.43. $Z_2(s) = 1(s + 4)$.

Глава 10

10.2. $i(t) = 0,156 \sin(t + 83^\circ) + 0,424 \sin 3t + 0,076 \sin(5t - 73^\circ)$; $u_L(t) = 0,156 \sin(t + 173^\circ) + 1,272 \sin(3t + 90^\circ) + 0,38 \sin(5t + 170^\circ)$; $u_C(t) = 1 + 1,404 \sin(t - 7^\circ) + 1,272 \sin(3t - 90^\circ) + 0,137 \sin(5t - 163^\circ)$. 10.3. $i_1(t) = 0,424 + 0,526 \cos(2t - 150^\circ) + 0,14 \cos(4t - 157^\circ)$; $I_1 = 0,572 \text{ А}$; $U_2 = 1,383 \text{ В}$; 10.5. $U_{эвм} = 56,5 \text{ В}$; $I_{эвм} = 7,05 \text{ А}$; $\varphi_{эвм} = 75^\circ 30'$. 10.7. $u_0 = 5 + 3,33 \sqrt{2} \cos \omega t$; $i_2 = 5 + 6,66 \sqrt{2} \cos \omega t$; $i_3 = 6,66 \sqrt{2} \cos(\omega t + 45^\circ)$; $i_4 = 5 + 6,66 \cos(\omega t - 45^\circ)$; $P = 83,3 \text{ Вт}$; $S = 84,6 \text{ В} \cdot \text{А}$; $\alpha = 0,98$. 10.8. $i_1 = 1 + 3 \sqrt{2} \cos \omega t + \sqrt{2} \cos(2\omega t - 90^\circ)$; $i_2 = 1 + \sqrt{2} \cos(2\omega t - 90^\circ)$; $i_3 = -3 \sqrt{2} \cos \omega t$; $i_4 = 2 \sqrt{2} \cos \omega t - (2 \sqrt{3} 3) \cos 2\omega t$. 10.9. $P_1 = 88,2 \text{ Вт}$;

$P_2 = 1281$ Вт. 10.10. $C_1 = 1,1$ мкФ; $C_2 = 1$ мкФ. 10.11. $I = 7,07$ А. 10.12. $u_2 = 2,96 \cos(\omega t - 99^\circ) + 4,06 \cos(2\omega t - 108^\circ) + 2,69 \cos(3\omega t - 117^\circ) + 2,3 \times \lambda \cos(5\omega t - 130^\circ) + 3 \cos(6\omega t - 135^\circ)$. 10.21. а) $f(t) = (2/\pi t) \sin 2t$; б) $f(t) = (2/\pi^2 t^2)(\cos 2t - \cos 3t)$.

Глава 11

11.3. Для схемы рис. 11.1,б: $Z_{c1} = \sqrt{-\omega^2(1-\omega^2)}$, $Z_{c2} = \sqrt{(1-\omega^2) - \omega^2}$, $e^Y = \sqrt{1-\omega^2} - \omega^2 + \sqrt{1-\omega^2}$. 11.5. Для Т-схемы первый вариант данных: $H_U = 1/(s^3 + s^2 + 2s + 1)$; для П-схемы второй вариант данных: $H_I = 1/(s^2 + 3s + 1)$. 11.10. $[a]_{22} = \{\pm(1+j); +j; +j; \pm(1+j)\}$. 11.11. П-схема, первый вариант: продольное звено $C_a = 1,3$ Ф, поперечные звенья $C_b = 1,3$ Ф; П-схема, второй вариант: продольное звено $C_a = 1,3$ Ф, поперечные звенья $L_b = 1$ Г. 11.12. $Z_{\text{н}} = j20$. 11.13. $U_{R1}/U_1 = 1 - H_U$, где $H_U = -y_{21}/(Y_{\text{н}} + y_{22})$; y_{21} и y_{22} — параметры всей системы, с подключенным R-элементом. 11.14. $[a]_{22} = \{13,8, 8,5\}$. 11.16. $H_U = 0,224 \exp(j63,4^\circ)$. 11.17. $H_U = (s^3 + 2s^2 + 2s + 1)/(s^3 + 9s^2 + 15s + 5)$. 11.23. $H_U = s/(1,75s^2 + 7s + 3)$, $H_I = -0,5s/(s + 3)$. 11.24. Схема рис. 11.24, а: $a_{11} = 2$, $a_{12} = s(L - M) = 0,5s$, $a_{21} = 1, s(L + M)$, $a_{22} = L/(L + M)$; схема рис. 11.24, б: $a_{11} = a_{22} = (7s^4 + 12s^2 + 4)/s^4$, $a_{21} = (8s^2 + 4)/s^3$, $a_{12} = (6s^6 + 18s^4 + 16s^2 + 4)/s^5$. 11.25. Схема рис. 11.25, а: $Z_{\text{вх}} = n^2(a_{11}Z_{\text{н}} + a_{12})/(a_{21}Z_{\text{н}} + a_{22})$; схема рис. 11.25, б: $Z_{\text{вх}} = (a_{11}n^2Z_{\text{н}} + a_{12})/(a_{21}n^2Z_{\text{н}} + a_{22})$. 11.27. Для схемы рис. 11.27, а: $Y_{\text{вх}} = -Y_{\text{н}}$. 11.29. $[z]_{22} = \{r_6 + r_9; r_9; r_9 - ar_{\text{к}}; r_9 + r_{\text{к}}(1 - a)\}$. 11.31. $[z]_{22} = \{R_1 + R_3; R_3 - \mu R_1; R_3; R_2 + R_3\}$.

Глава 12

12.1. $R = 10$ Ом; $L = 496$ мкГ; $Q = 79$. 12.2. $u_C = 12,5 \cos(\omega t - 38^\circ 30')$ $P = 0,605 \cdot 10^{-3}$ Вт. 12.3. $u_C = 35 \cos(10^7 t + 68^\circ 30')$. 12.4. $R = 20$ Ом, $L = 500$ мкГ, $C = 500$ пФ. 12.6. $2\Delta\omega_0 = 7 \cdot 10^4$ рад/с. 12.8. $Z_1 = 10 + j(\omega \cdot 250 \times 10^{-6} - \frac{1}{\omega 10^{-9}})$; $Z_2 = 5 + j\omega 750 \cdot 10^{-6}$. 12.9. $2\Delta\omega_0 = 11,9 \cdot 10^4$ рад/с. 12.12. а) $u_2 = 32 \cos(\omega_0 t + 90^\circ)$; б) $u_2 = 2,57 \cos(0,95 \omega_0 t - 104)$. 12.14. 1. Схема рис. 12.16: $Z_1 = Z_2 = j\omega \frac{0,163}{2}$, $Z_3 = -j \frac{1}{\omega 0,098 \cdot 10^{-6}}$. 2. Схема рис. 11.4, б: $Z_b = -j \frac{1}{\omega \cdot 0,01 \cdot 10^{-6}}$, $Z_a = j\omega \cdot 0,4$. 12.15. Для Т-образной схемы: $C = 0,4$ мкФ, $L/2 = 0,2$ Г. Для П-образной схемы: $C/2 = 0,2$ мкФ, $L = 0,4$ Г. 12.19. $L = 0,2$ Г. $C = 0,2$ мкФ. 12.20. 1. Рис. 12.16: $Z_1 = Z_2 = j\omega \cdot 66,6 \times 10^{-3}$, $Z_3 = -j \frac{1}{\omega 0,0167}$; 2. Рис. 12.16: $Z_1 = Z_2 = -j \frac{1}{\omega 0,83 \cdot 10^{-8}}$, $Z_3 = j\omega 0,133$. 12.26. Схема рис. 12.16: $Z_1 = j\omega 47,7 \cdot 10^{-3}$, $Z_2 = 0$, $Z_3 = j\omega \cdot 85 \times 10^{-3} - j \frac{1}{\omega \cdot 0,19 \cdot 10^{-6}}$, $f_\infty = 1250$ Гц. 12.27. $f_0 = 6250$ Гц, схема рис. 12.16: $Y_1 = j\omega 1700 \cdot 10^{-12} - j \frac{1}{\omega \cdot 0,597}$, $Y_2 = \infty$, $Z_3 = j\omega \cdot 1,06$. 12.29. $L_1 = 3/8$ Г, $L_2 = 0,5$ Г, $C_2 = 0,5$ Ф. 12.30. $L = 0,5$ Г, $C_1 = 2$ Ф, $C_2 = 2,25$ Ф. 12.31. $\omega_{01} = 1$ рад/с, $\omega_{02} = 2$ рад/с, $\omega_\infty = 0,755$ рад/с, $Z_C = 0,175$ Ом.

Глава 13

13.2. $L = \rho/(\lambda f)$; $C = 1/(\lambda \rho f)$. 13.4. $Z_C = 612 \exp(-j 7^\circ 13')$; $\underline{Y} = (2,43 + j 17,5) \cdot 10^{-3}$; $R = 2,82$ Ом/км; $L = 2,09 \cdot 10^{-3}$ Г/км. 13.6. $\gamma_1 = 0,9$; $P_1 = 2,22$ кВт; $\Delta P = 220$ Вт; $U_1 = 1100$ В; $I_1 = 2,02$ А; $U_2 = 1050$ В; $I_2 = 1,9$ А. 13.9. $u(t) = 58,8 \cos \omega t$; $i(t) = 0,405 \cos(\omega t + \pi/2)$. 13.10. 1) $Z_{\text{вх}} = -j 320$;

2) $Z_{\text{вх}} = j 64$. 13.11. $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{v} = 1,8^\circ \text{ м}$. При к. з. линии $Z_{\text{вх}} = j\rho \operatorname{tg} \beta l = j 120 \operatorname{tg} 72^\circ = j 367 \text{ Ом}$ (индуктивность $L = 5,88 \text{ мкГ}$). При разомкнутой линии $Z_{\text{вх}} = -j\rho \operatorname{ctg} \beta l = -j 39$ (емкость $C = 4,09 \text{ нФ}$). 13.17. $I_1 = 60,7 \text{ мА}$; $U_1 = 12,1 \text{ В}$; $P_1 = 0,73 \text{ Вт}$. 13.21. 1) $W_2 = 0$ ($Z_2 = \rho$) или $l \rightarrow \infty$; 2) $W_2 \neq 0$, но $W_1 = 0$; 3) $W_1 = 0,2$, $W_2 = -0,25$. 13.22. $u(t) = 50 \delta_1(t) - 12,5 \delta_1(t - 2t_0)$, $i(t) = 0,5 \delta_1(t) + 0,125 \delta_1(t - 2t_0)$. При $t \in [0; 2t_0]$ $u = U\rho(R_1 + \rho) = 50 \text{ В}$; $i = U(R_1 + \rho) = 0,5 \text{ А}$; При $t > 2t_0$ $u = UR_2(R_1 + R_2) = 37,5 \text{ В}$; $i = U(R_1 + R_2) = 0,625 \text{ А}$. 13.24. На входе линии $u(t) = 200 \delta_1(t)$; $i(t) = 2 \delta_1(t) + 4 \delta_1(t - 2t_0) + 4 \delta_1(t - 4t_0) + \dots$

1

Глава 14

14.1.1) $H(s) = (s^2 + 1)/[(s + 1)(s^2 + s + 1)]$; 2) $H(s) = (s^2 + 2s + 2)(s^3 + 2s^2 + 2s + 1)$. 14.2. $H(s) = [(2/3)s^2 + (1/3)s + 1](s^2 + 2s^2 + 2s + 1)$. 14.5. $Z(s)$ не удовлетворяет условиям п. в. ф. 11.7. $Z(s) = (1/20)(s^3 + 8s^2 + 19s + 12)(s^2 + 5,5s + 7)$; $R(\omega)|_{\omega=0} > R(\omega)|_{\omega \rightarrow \infty}$ и функция соответствует RC-

двухполюснику. 14.9. Реализация по Кауэру дает схему со структурой по рис. 14.8 с параметрами $(\Phi, \Gamma) \{C_1; L_1; C_2; L_2; C_3\} = \{1; 1^2; 4/3; 3/2; 1/3\}$. Реализация по Фостеру для $Z(s)$ аналогична рис. 14.8, в; $C = 8,3$; параллельная цепочка из $L_1 = 18$ и $C_2 = 4$; вторая параллельная цепочка $L_2 = 3/32$; $C_3 = 8/3$. Реализация для $Y(s)$ соответствует рис. 14.8, з. 14.10. Реализация по Кауэру (рис. 14.8, б); параметры $(\Gamma, \Phi) C_1 = 2$; $L_1 = 1/6$; $C_2 = 9,4$; $L_2 = 4/3$; $C_3 = 1/4$. Реализация по Фостеру (рис. 14.18, в): $C_1 = 9/2$; $L_1 = 1/54$; $C_2 = 18$; $L_2 = 1/27$; $C_3 = 9/2$. Реализация по Фостеру для $Y(s)$ (рис. 14.8, з): $C_1 = 2\Phi$; $L = 1/4$; $C_2 = 2$; $L_2 = 1/2$; $C_3 = 1/2$. 14.12. Реализация $Y_1(s)$ (рис. 14.11, в), где $R_1 = 0$; $C_1 = 2\Phi$; $R_2 = 1 \text{ Ом}$; вместо C_2 — последовательная цепочка $L = 2,3 \text{ Г}$ и $R = 1/3 \text{ Ом}$; реализация $Y_2(s)$ (рис. 14.11, в), где $R_1 = 1 \text{ Ом}$; $C_1 = 0$; $C_2 = 1 \text{ Ф}$ и вместо R_2 включена $L = 1/4 \text{ Г}$. 14.13. Для $Y_1(s)$ $Z_1 = 0$; $Y_2 = 1 \text{ Ом}$; Z_3 — последовательное соединение $L = 1 \text{ Г}$ и $R = 1 \text{ Ом}$; Y_4 — параллельное соединение $C = 1 \text{ Ф}$ и $R = 1 \text{ Ом}$. 14.14. $Z_A(s) = s + 1$; в схеме последовательно соединены $R = 1 \text{ Ом}$ и $L = 1 \text{ Г}$. 14.15. $Z_A(s) = 10/7 + 100 s^4/(s^2 + 10^3)$; схема реализации (см. рис. 14.13) при $Z_1 = Y_2 = 0$; $Z_3 = 10/7 \text{ Ом}$; Y_4 — параллельно $L = 0,1 \text{ Г}$ и $C = 0,01 \text{ Ф}$. 14.16. $Z(s) = (s + 2)/(s + 1)$; реализующая схема (рис. 14.13) при $Z_1 = Y_2 = 0$; $Z_3 = 1 \text{ Ом}$; Y_4 — параллельно $R_1 = 1 \text{ Ом}$ и $C_1 = 1 \text{ Ф}$. 14.17. $Z_{11} = Z_{22} = s^5 [(s^2 + 1)(s^2 + 3)]$; $Z_{12} = (s^5 + 9s^3 + 9s) [(s^2 + 1)(s^2 + 3)]$. 14.19. Возможная реализация для п. 1 (рис. 14.13) при $Z_1 = 0$; $Y_2 = L_2 = 7,6 \text{ Г}$; Z_3 — параллельно $L = 49,6 \text{ Г}$ и $C = 12/49 \text{ Ф}$; $Y_4 = L_1 = 7 \text{ Г}$. 14.21. Для схемы рис. 11.4, в: 1) $Y_a = s$; $Y_b = a$; 2) $Y_a = s + 1$; $Y_b = s/(s + 1)$. 14.25. При выборе $M(s) = s + 1,41$ реализация $H_{U1}(s)$ отвечает рис. 14.24 при тех же номиналах элементов, но нижний вывод C_3 подключен к входному выводу цепи. Реализация $H_{U2}(s)$ (см. рис. 14.24): $R_1 = 1/2, 74 \text{ Ом}$; $R_2 = 0,400 \text{ Ом}$; $R_3 = 1/7,295 \text{ Ом}$; $C_1 = 6,25 \text{ Ф}$; $C_2 = 1,0835 \text{ Ф}$; $C_3 = 1/1,244 \text{ Ф}$ и параллельно C_1 включен резистор $R = 1/6,25 \text{ Ом}$. 14.26. $s_{nk} = -\sin(1 + 2k)\pi/(2n) + j \cos(1 + 2k)\pi/(2n)$; $k = 0, 1, \dots, n - 1$. $Q_{\text{макс } 4} = 1,27$; $Q_{\text{макс } 6} = 1,91$; $Q_{\text{макс } 10} = 3,2$; $H(s) = 1^4 \{(s + 1) [(s + 0,309017)^2 + 0,95105653^2] [(s + 0,809017)^2 + 0,5877853^2]\}$. 14.28. Для фильтров Баттерворта $\alpha_1 = -\epsilon_1^2 n/(1 + \epsilon_1^2)^{3/2}$; для фильтров Чебышева $\alpha_2 = -\epsilon_2^2 n^2(1 + \epsilon_2^2)^{3/2}$; $\alpha_1/\alpha_2 = 1/n$. 14.30. Структура цепи 1, 1, 3; 2, 1, 3; 3, 2, 3; 4, 2, 3; содержание ветвей: 1 — источник напряжения; 2 — $L = 16 \text{ мГ}$; 3 — $C = 8,03 \cdot 10^{-3} \text{ мкФ}$; 4 — $R = 1 \text{ кОм}$. 14.31. Структура цепи 1, 1, 5; 2, 2, 3; 3, 3, 4; 4, 4, 5; содержание ветвей: 1 — источник напряжения; 2 — $R = 1 \text{ Ом}$; 3 — $L_1 = 3(4\sqrt{2}) \text{ Г}$; 4 — $L_2 = 1/(4\sqrt{2}) \text{ Г}$; 5 — $C = \sqrt{2} \text{ Ф}$. 14.38. $[a]_{22} = \{0; \mp 1 R; \pm R; 0\}$; $[Z]_{22} = \{0; -R; -R; 0\}$; $[Y]_{22} = \{0, 1 R; 1/R; 0\}$. $Z_{\text{вх}} = -R^2/Z_n$, например, при $Z_n = 1/(j\omega C_n)$; $Z_{\text{вх}1} = -j\omega R^2 C = -j\omega L_3$; $L_3 = R^2 C$. 14.40. При T-образной схеме реализации отрицательной индуктивности $Z = 3$ получим структуру цепи 1, 1, 2; 2, 2, 3; 3, 1, 3; 4, 3, 4; 5, 3, 4; 6, 4, 5; 7, 4, 5. В ветвях: 1 — $C_1 = 2/9 \text{ Ф}$; 2 — $R_1 = 3 \text{ Ом}$; 3 — $R_2 = -3 \text{ Ом}$; 4 — $R_3 = 1,3 \text{ Ом}$; 5 — $C_2 = 1 \text{ Ф}$; 6 — $R_4 = -1 \text{ Ом}$; 7 — $C_3 = 2 \text{ Ф}$. 14. 2. Если выбрать, например, $B(s) =$

$= (s+1)(s+2)(s+3)$, то $C(s) = (s+3 + \sqrt{3})(s+3 - \sqrt{3})(s+3)$; $D(s) = 7(s+1)(s+2)$. 14.43. $H_U(s) = KY_{31}(s)[1 - KY_{32}(s)]$. 14.44. $Z_{\text{вх}} = RR_0 Z$; при $K_1 = 1$; $K_2 = -(R+R_0)$. 14.45. $Z_{\text{вх}}(s) = Rs$ — индуктивное сопротивление с $L = 10^6$ Г. 14.46. Для схемы: а) $Z_1 = Z_2$; б) $K = 1$; в) и г) $Z_1 = Z_2$; $K \rightarrow \infty$. 14.47. $H_U(s) = -Y_{21}(s)[Y_1(s) + Y_{22}(s) - (K-1)Y_2(s)]$. 14.50. $K(s^2 + a^2)[s^2 + a(d+1)(1b + (2-k)d/s + (1+(d+1)b)a^2]$. Ограничения $\gamma \geq a^2$, $A_0 \leq 2$. 14.51. $K = 2$, $a = 1$, $d = b = 1$. 14.52. $I_{\text{вх}} = (U_{\text{вх1}} - U_{\text{вх2}})/R_1$. 14.54. $C_{\text{вх}} = [(R_3 + R_4)R_3][R_1, R_2]C$; при взаимной замене элементов C и R_1 на входе будет имитирована индуктивность. 14.56. При $K = 1$ и $M(s) = s + 3$ схема (см. рис. 14.55) содержит $Z_1(s) = 4/9s$; $Z_2(s) = 3/2$; $Z_3(s) = 3/2$ между выходом всей цепи и входом ОУ — параллельно $R = 1/3$ Ом и $C = 1$ Ф; между входом всей цепи и входом ОУ — параллельно $R_1 = 3,4$ Ом и $C_1 = 1$ Ф. 14.57. а) $[a]_{22} = \{-R_1R_3/[R_4(R_1 + R_2)]\}$; 0; 0; 0 — источник напряжения, управляемый напряжением с отрицательным коэффициентом усиления $-R_4(R_1 + R_2)/R_1R_3$; б) $[a]_{22} = \{0; R_2(R_1R_3); 0; 0\}$ — источник напряжения, управляемый током. 14.58. $Z_5Z_1 = Z_4Z_6$; $Z_1Z_3 = Z_2Z_4$. 14.59. $Z_{\text{вх}} = R^2/Z_{\text{н}}$ при $R_aR_c = RR_b$; коэффициент гирации R , гиратор — пассивная цепь. 14.60. $H_U(s) = Y_{12a}(s)/Y_{12b}(s)$. 14.66. Для КОСН с инверсией тока $Z_T(s) = Z_{21b}(s) \cdot Z_{21b}(s)/[Z_{11b}(s) - KZ_{22a}(s)]$; $Y_T(s) = Y_{21a}(s)Y_{21b}(s)[-Y_{22a}(s) + KY_{11b}(s)]$; $H_T(s) = Z_{21b}(s) \times Y_{21b}(s)/[1 - KY_{11b}(s)] \times Z_{22a}(s)$; $H_U(s) = Y_{21a}(s)Z_{21b}(s)/[K - Y_{22a}(s)Z_{11b}(s)]$. 14.63. а) $L = Cg^2$ б) $C_0 = g_0^2 C$. 14.70. $Z_A(s) = \gamma^2 b/(aH_0) + \gamma^2 b/(sH_0)$; $Z_B(s) = bH_0/(s+a)$; H_0 — коэффициент, учитывающий допустимый диапазон нагрузок гиратора. 14.72. $H_U(s) = K_0/[s^2R_1R_2CC_2 + s(R_1C_1(1-K) + R_2C) + 1]$; $S_K^Q = 2Q - 1$; $s_m^Q = Q - 1/2$; $s_n^Q = Q - 1/2$; $s_k^{\omega_0} = 0$; $s_m^{\omega_0} = s_n^{\omega_0} = -1/2$; $K = 2 - 1/Q$. 14.74. Для входных и передаточных сопротивлений $Z_{LC}(s) = sZ_{RC}(s^2)$; $Z_{RC}(s) = (1/\sqrt{s}) \times Z_{LC}(\sqrt{s})$; для функций перелачи $H_{LC}(s) = H_{RC}(s^2)$; $H_{RC}(s) = H_{LC}(\sqrt{s})$. 14.76. Производные напряжения U_5 по R_k равны: по R_2 — $(-1/8)$; по R_3 — $(1/32)$; по R_4 — $(-3/32)$; по R_5 — $(5/32)$. 14.77. $\partial I_1/\partial R_1 = -(U_1 - R_2I_2)/(R_1 + R_2)^2$; $\partial I_1/\partial R_2 = -(U_1 + R_1I_2)/(R_1 + R_2)^2$. 14.78. $S_{R_1}^{HU} = S_{\zeta}^{HU} = S_{\omega}^{HU} = 1/(1 + j\omega RC)$. 14.79. $S_C^{HU} = -sR_1C(sL + R_2)/D$; $S_L^{HU} = -sL(sR_1C + 1)/D$, $D = s^2R_1LC + s(R_1R_2C + L) + R_1 + R_2$.

Глава 15

15.1. $U_{\text{н}} = 0,5$ В. 15.4. $i(t) = 1 + \cos 3t$ при $-1 + \cos 3t - \sin t > 0$; $i(t) = 2 + \sin t$ при $-1 + \cos 3t - \sin t < 0$. 15.5. $u(i) = -0,25i + 0,375i^2$. 15.6. $f(i) = 0,55 - 0,66i + 0,473i^2$. 15.9. $i_1 = 1,02489$; $i_2 = 1,02459$. 15.10. $i_1(t) = 1,2009 \sin \omega t$. 15.21. $i(t) = 4 \sin t/(0,5 + 2 \sin 3t)$. 15.22. $i(t) = 2 \cos \times t/(3 + 0,6 \cos t)$. 15.23. $i = \varphi(u)$, где $\varphi[f(X)] = X$. 15.27.

$W = 0,5u^{4/3}$. 15.28. $d\varphi(i)dt = u$. 15.47. $u(t) = \int_0^t i(\tau)h(t-\tau)d\tau + f(i)$, где $h(t) = L^{-1}[1/Z(s)]$. 15.56. $C = 0,0745$. 15.57. $U_m = 1,65$ В.